

Modelování mezibankovního trhu

Tomáš Kosička
VŠFS 2012

Proč modelovat mezibank

Hlavním důvodem pro analýzu mezibankovního trhu je umožnění ohodnocení úvěrových rizik, souvisejících s mezibankovními půjčkami a testování celého bankovního systému.

Na mezibankovním trhu se likvidita nevytváří, ale pouze redistribuuje. Proto v případě problémů jedné jediné banky, která logicky místo prodeje dlouhodobých pozic dá přednost stažení svých vkladů u ostatních bank a tím celkovou likviditu v systému sníží, lze očekávat šíření těchto problémů v celém sektoru.

Co se používá pro modelování

Model „maximální entropie“

Mezibankovní vazby můžeme popsat maticí $N \times N$, kde N je počet bank, které ve zkoumaném systému máme

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad B_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

A_i je celková částka, kterou i -tá banka půjčuje a B_j částka, kterou si j -tá banka z trhu bere.

Minimalizací křížové entropie mezi dvěma maticemi najdeme matici A'

$$\min a'_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ln \frac{a'_{ij}}{\tilde{a}_{ij}}$$

$$\sum_{j=1}^n a'_{ij} = A'_i \quad \sum_{i=1}^n a'_{ij} = B'_j \quad a'_{ij} \geq 0 \text{ pro } i \neq j \quad \text{a} \quad a'_{ij} = 0 \text{ pro } i = j$$

„Herní model“

Každá z bank představuje hráče, který se snaží získat na trhu vklad, což je modelováno jednoduchou binomickou hrou, kdy hraje celou svou „váhou“ a v případě porážky přichází o tuto „váhu“. Pokud se tím dostane na nulu ve hře končí.

Ve dvourozměrném modelu přibude nová matice se stejnou hrou, pouze se soutěží o umístění vkladů.

Uvažovaný případ – deset bank

Pravděpodobnostní vztah pro první sloupec: $P(A1) = A/(B+C+...+J)$

Pro druhý sloupec (s využitím podmíněné pravděpodobnosti):

$$P(A2) = P(A2|B1)*P(B1) + P(A2|C1)*P(C1) + ... + P(A2|J1)*P(J1)$$

Pro třetí sloupec se to už komplikuje:

$$\begin{aligned} P(A3) &= P(A3|B2)*P(B2) + P(A3|C2)*P(C2) + ... + P(A3|J2)*P(J2) = \\ &= P(A3|B2) * [P(B2|C1)*P(C1) + P(B2|D1)*P(D1) + ... + P(B2|J1)*P(J1)] + \\ &+ P(A3|C2) * [P(C2|B1)*P(B1) + P(C2|D1)*P(D1) + ... + P(C2|J1)*P(J1)] + \\ &+ P(A3|D2) * [P(D2|B1)*P(B1) + P(D2|C1)*P(C1) + ... + P(D2|J1)*P(J1)] + \\ &+ P(A3|E2) * [P(E2|B1)*P(B1) + P(E2|C1)*P(C1) + ... + P(E2|J1)*P(J1)] + \\ &+ P(A3|F2) * [P(F2|B1)*P(B1) + P(F2|C1)*P(C1) + ... + P(F2|J1)*P(J1)] + \\ &+ P(A3|G2) * [P(G2|B1)*P(B1) + P(G2|C1)*P(C1) + ... + P(G2|J1)*P(J1)] + \\ &+ P(A3|H2) * [P(H2|B1)*P(B1) + P(H2|C1)*P(C1) + ... + P(H2|J1)*P(J1)] + \\ &+ P(A3|I2) * [P(I2|B1)*P(B1) + P(I2|C1)*P(C1) + ... + P(I2|J1)*P(J1)] + \\ &+ P(A3|J2) * [P(J2|B1)*P(B1) + P(J2|C1)*P(C1) + ... + P(J2|J1)*P(J1)] \end{aligned}$$

$$9^{na9} = 387.420.489$$

Popis získání „herní“ matice

$$a_{iN} = P(A_i | N)$$

$$b_{Nj} = P(B_j | N)$$

z těchto matic vytvořím nové matice **C** a **D** s následujícími členy

$$c_{ij} = a_{ik} * B_j, \text{ kde } k \text{ je pořadí } B_j$$

$$d_{ij} = b_{ki} * A_j, \text{ kde } k \text{ je pořadí } A_j$$

Z matic **C** a **D** vytvoříme novou matici **E**

$$e_{ij} = (c_{ij} + d_{ij})/2$$

Protože ve výsledné matici předpokládáme nulovou hlavní diagonálu, provedeme její „vynulování“, čímž dostaneme matici

F

$$f_{ij} = e_{ij} * (B_j + e_{jj})/B_j \text{ pro } i \neq j$$

$$f_{ij} = 0 \text{ pro } i = j$$

Konečnou matici **F** poté iteruji v dostatečném počtu kroků (pro dosažení rozumné přesnosti postačuje sto iteračních kroků)

Data z ČNB

Výsledná matice (v tis. Kč). Mezibankovní vztahy: Expozice bank – nadlimitní vklady a přijaté úvěry nad 100 mil Kč nebo nad 1% bilanční sumy (řádek zahrnuje banku, která vklad přijala, sloupce zahrnují banky, které vklad uložily)

| | | | | | | | | | | | |
|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|-----------|------------|------------|
| | 4 779 651 | 8 844 443 | 15 904 826 | 2 286 768 | 1 916 553 | 1 100 011 | 690 239 | 928 584 | 6 039 839 | 28 008 326 | |
| 2 846 289 | 0 | 668 037 | 1 317 958 | 177 991 | 82 631 | 0 | 0 | 49 633 | 0 | 550 039 | 2 846 289 |
| 15 445 782 | 0 | 0 | 13 299 848 | 1 033 946 | 0 | 0 | 0 | 7 820 | 614 062 | 490 106 | 15 445 782 |
| 38 955 389 | 3 687 412 | 6 958 726 | 0 | 1 000 010 | 289 333 | 500 005 | 500 005 | 0 | 602 039 | 25 417 859 | 38 955 389 |
| 3 893 371 | 800 011 | 517 673 | 281 269 | 0 | 0 | 100 000 | 0 | 756 628 | 937 559 | 500 231 | 3 893 371 |
| 3 235 085 | 0 | 0 | 5 751 | 0 | 0 | 0 | 50 001 | 0 | 2 529 248 | 650 085 | 3 235 085 |
| 2 256 934 | 0 | 500 005 | 1 000 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 556 925 | 200 004 | 2 256 934 |
| 2 106 747 | 292 228 | 200 002 | 0 | 0 | 0 | 500 006 | 0 | 114 503 | 800 006 | 200 002 | 2 106 747 |
| 215 054 | 0 | 0 | 0 | 74 821 | 0 | 0 | 140 233 | 0 | 0 | 0 | 215 054 |
| 1 544 589 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 544 589 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 544 589 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 4 779 651 | 8 844 443 | 15 904 826 | 2 286 768 | 1 916 553 | 1 100 011 | 690 239 | 928 584 | 6 039 839 | 28 008 326 | |

Entropie

| | | | | | | | | | | | |
|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|-----------|------------|------------|
| | 4 779 651 | 8 844 443 | 15 904 826 | 2 286 768 | 1 916 553 | 1 100 011 | 690 239 | 928 584 | 6 039 839 | 28 008 326 | 70 499 240 |
| 2 846 289 | 0 | 295 098 | 1 412 817 | 65 686 | 54 660 | 31 045 | 19 448 | 25 667 | 169 373 | 772 498 | 2 846 292 |
| 15 445 782 | 788 076 | 0 | 8 051 486 | 380 800 | 316 948 | 180 076 | 112 814 | 148 973 | 982 641 | 4 483 987 | 15 445 802 |
| 38 955 389 | 3 377 669 | 7 212 902 | 0 | 1 630 815 | 1 358 110 | 772 246 | 483 860 | 639 900 | 4 216 078 | 19 263 772 | 38 955 352 |
| 3 893 371 | 180 629 | 393 185 | 1 894 301 | 0 | 72 658 | 41 261 | 25 847 | 34 101 | 225 081 | 1 026 312 | 3 893 375 |
| 3 235 085 | 149 429 | 325 386 | 1 569 133 | 72 243 | 0 | 34 134 | 21 382 | 28 209 | 186 196 | 848 976 | 3 235 088 |
| 2 256 934 | 103 275 | 225 058 | 1 087 517 | 49 932 | 41 544 | 0 | 14 777 | 19 493 | 128 677 | 586 663 | 2 256 936 |
| 2 106 747 | 95 963 | 209 203 | 1 011 909 | 46 398 | 38 602 | 21 919 | 0 | 18 112 | 119 562 | 545 083 | 2 106 749 |
| 215 054 | 9 820 | 21 403 | 103 469 | 4 748 | 3 950 | 2 243 | 1 405 | 0 | 12 235 | 55 781 | 215 054 |
| 1 544 589 | 74 792 | 162 216 | 774 164 | 36 148 | 30 082 | 17 087 | 10 705 | 14 129 | 0 | 425 266 | 1 544 591 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 70 499 240 | 4 779 654 | 8 844 451 | 15 904 795 | 2 286 769 | 1 916 554 | 1 100 012 | 690 239 | 928 584 | 6 039 842 | 28 008 339 | 70 499 240 |

Herní model dvojrozměrný

| | | | | | | | | | | | |
|------------|-----------|-----------|------------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|-----------|------------|------------|
| | 4 779 651 | 8 844 443 | 15 904 826 | 2 286 768 | 1 916 553 | 1 100 011 | 690 239 | 928 584 | 6 039 839 | 28 008 326 | 70 499 240 |
| 2 846 289 | 0 | 230 040 | 868 360 | 415 951 | 416 527 | 228 719 | 146 835 | 145 480 | 305 061 | 92 646 | 2 849 619 |
| 15 445 782 | 1 021 791 | 0 | 11 274 773 | 389 563 | 128 298 | 19 616 | 14 444 | 2 952 | 1 253 593 | 1 361 418 | 15 466 447 |
| 38 955 389 | 1 430 996 | 7 640 898 | 0 | 299 035 | 46 328 | 3 501 | 2 712 | 1 | 3 302 831 | 26 190 689 | 38 916 993 |
| 3 893 371 | 753 610 | 364 489 | 1 352 604 | 0 | 425 318 | 185 083 | 122 595 | 91 860 | 457 210 | 144 459 | 3 897 228 |
| 3 235 085 | 616 762 | 267 136 | 1 006 597 | 440 687 | 0 | 203 319 | 131 653 | 117 869 | 347 847 | 106 458 | 3 238 327 |
| 2 256 934 | 379 134 | 142 823 | 556 324 | 292 239 | 334 635 | 0 | 134 505 | 169 389 | 192 921 | 57 483 | 2 259 454 |
| 2 106 747 | 332 972 | 122 857 | 482 715 | 258 797 | 307 817 | 213 595 | 0 | 174 169 | 166 829 | 49 432 | 2 109 183 |
| 215 054 | 31 367 | 9 194 | 40 223 | 24 217 | 37 321 | 38 180 | 17 501 | 0 | 13 540 | 3 779 | 215 321 |
| 1 544 589 | 210 056 | 74 535 | 298 999 | 163 826 | 217 768 | 206 487 | 119 058 | 225 563 | 0 | 30 377 | 1 546 670 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 70 499 240 | 4 776 687 | 8 851 972 | 15 880 595 | 2 284 314 | 1 914 012 | 1 098 501 | 689 304 | 927 283 | 6 039 832 | 28 036 742 | 70 499 241 |

Srovnání výsledků

| | Rozptyl | χ^2 |
|----------------------------|-----------|-------------|
| Model „maximální entropie“ | 1.135.765 | 182.477.949 |
| „Dvojrozměrný herní“ model | 722.263 | 66.976.247 |

Závěr

V současné době nejpoužívanější model „maximální entropie“ pro výpočet bilaterálních expozic na mezibankovním trhu není nejpřesnější a mohl by být nahrazen „herním modelem“. Další možnosti využití tohoto modelu vidím ve společenských vědách jako velmi široké. Jedinou nevýhodou je složitost výpočtu. Zatímco výpočet hodnot v modelu ME zabere několik minut (včetně iterace), výpočet HM je mnohem náročnější a vyžaduje speciální počítačovou aplikaci. Na druhou stranu HM umožňuje testovat různé parametry pomocí jednoduché změny nastavení herní pravděpodobnosti.