



VYSOKÁ ŠKOLA
FINANČNÍ A SPRÁVNÍ
Edice SCIENCEpress

Produkční funkce jako nástroj zobrazení ekonomické reality

| Jiří Mihola a kol.

Vysoká škola finanční a správní, a.s.

Jiří Mihola a kol.

Produkční funkce jako nástroj zobrazení ekonomické reality

Souhrnná výzkumná monografie

Praha 2021

Vzor citace:

MIHOLA, Jiří a kol. *Produkční funkce jako nástroj zobrazení ekonomické reality* [online]. Praha: VŠFS, 2021. Edice SCIENCEpress. ISBN 978-80-7408-224-5.

Ing. Bc. Jiří Mihola, CSc, a kol.

Produkční funkce jako nástroj zobrazení ekonomické reality

Katedra financí

Fakulta ekonomických studií

Vysoká škola finanční a správní, a.s.

Estonská 500, 101 00 Praha 10

jmihola@seznam.cz

Spoluautoři:

Ing. Mgr. Petr Wawrosz, Ph.D.

Ing. Jana Kotěšovcová, Ph.D.

RNDr. Jan Lánský, Ph.D

Bc. Olexandar Bulatnikov

Bc. Jakub Nábělek

Bc. Luka Slemnik

Odborná kniha byla finančně podpořena z prostředků účelové podpory na specifický vysokoškolský výzkum v rámci interního projektu Synergický efekt jako výsledek optimalizace na produkčních funkcích zobrazujících ekonomickou realitu č. 7427/2019/05.

RECENZENTI:

doc. Ing. Slavoj Czesaný, DrSc., VŠE

doc. Radim Valenčík, CSc., VŠFS

Vydala Vysoká škola finanční a správní, a.s., v edici SCIENCEpress.

Estonská 500, 101 00 Praha 10

Tel.: +420 210 088 862

www.vsfs.cz

jako svou 323. publikaci

Vydání odborné publikace bylo schváleno vědeckou redakcí nakladatelství VŠFS.

Edice řídí PhDr. Jan Emmer

Vydavatelský redaktor Mgr. Petr Mach

Počet stran 160

Vydání první, Praha, 2021

Tisk dům tisku s.r.o., Hvězdoslavova 614/16, 400 03 Ústí nad Labem

Tato publikace neprošla redakční úpravou. Nakladatelství Vysoké školy finanční a správní neručí za obsahovou ani technickou kvalitu publikace. Za autorské dílo zodpovídají autoři.

© Vysoká škola finanční a správní, a.s., 2021

ISBN 978-80-7408-224-5 - online

DOI <https://dx.doi.org/10.37355/03.2021/1>

Obsah

| | |
|---|----|
| Úvod | 5 |
| 1 Aktuálnost problematiky produkčních funkcí..... | 7 |
| 2 Přístup ekonomické teorie k problematice produkční funkce..... | 8 |
| 2.1 Obecná charakteristika produkční funkce | 8 |
| 2.2 Obecná charakteristika mikroekonomické produkční funkce..... | 11 |
| 2.3 Využití mikroekonomické produkční funkce | 14 |
| 2.4 Produkční funkce v makroekonomii..... | 18 |
| 2.4.1 Obecná charakteristika makroekonomické produkční funkce | 18 |
| 2.4.2 Využití makroekonomické produkční funkce | 19 |
| 2.4.3 Praktické příklady makroekonomických produkčních funkcí | 21 |
| 3 Vymezení a typologie produkčních funkcí | 24 |
| 3.1 Podstata problému a jeho univerzálnost | 24 |
| 3.2 Základní charakteristika | 30 |
| 3.3 Produkční funkce ve statickém tvaru..... | 31 |
| 3.4 Produkční funkce v dynamickém tvaru..... | 36 |
| 3.5 Dvoufaktorová produkční funkce | 39 |
| 3.6 Multifaktorová produkční funkce KLEM | 44 |
| 4 Prognóza vývoje největších ekonomik světa | 47 |
| 4.1 USA, Čína, Indie..... | 47 |
| 4.2 Prognóza vývoje deseti největších ekonomik světa | 53 |
| 5 Druhy a typy agregací | 57 |
| 5.1 Druhy a typy agregací | 58 |
| 5.2 Vazby statické a dynamické úlohy..... | 64 |
| 6 Příklad využití multiplikační agregace..... | 68 |
| 6.1 Produkční funkce s geometrickou agregací | 69 |
| 6.2 Příklady využití multiplikační agregace..... | 71 |
| 7 Konstantní produkční funkce u kryptoměn..... | 79 |

| | |
|---|-----|
| 8 Farmářská úloha rozdělení vody | 82 |
| 9 Potenciální produkt a produkční mezera | 85 |
| 9.1 Potenciální produkt..... | 85 |
| 9.2 Potenciální produkt jako průměr..... | 86 |
| 9.3 Použité datové zdroje..... | 87 |
| 9.4 Bližší specifikace dat a test na stacionaritu | 88 |
| 9.5 Výpočet potenciálního produktu | 89 |
| 10 Míra nezaměstnanosti neakcelerující inflaci | 94 |
| 10.1 Míra nezaměstnanosti | 95 |
| 10.2 Použitý Hodrick-Prescottův filtr..... | 96 |
| 10.3 Výchozí zdroje dat..... | 97 |
| 10.4 Testy na stacionaritu | 97 |
| 10.5 Využití HP filtru..... | 98 |
| 11 Kvantová ekonomie | 102 |
| 12 Elementární distribuční model EDM | 115 |
| 12.1 EDM lomené produkční funkce pro 3 aktéry | 117 |
| 12.2 Elementární distribuční model podle metrik | 120 |
| 12.3 EDM polynomických produkčních funkcí vyšších řádů..... | 127 |
| 13 Charakteristika dosavadní publikační činnosti na dané téma | 140 |
| 14 Závěry a další možnosti využití získaných výsledků | 141 |
| Publikace obsahující myšlenky publikované v této monografii | 144 |
| Literatura | 151 |
| Resumé | 158 |

Úvod

Účelem monografie je shrnout poznatky z dlouhodobého výzkumu, produkčních funkcí s důrazem na zobecnění těchto poznatků. Z větší části probíhal tento výzkum v rámci interního výzkumného projektu financovaného z účelové podpory na specifický vysokoškolský výzkum (zkráceně SVV). Tato monografie je jedním z výstupů projektu SVV z období březen 2019 až únor 2021 pod názvem *Synergický efekt jako výsledek optimalizace na produkčních funkcích zobrazujících ekonomickou realitu* č. 7427/2019/05.

Produkční funkce patří vždy mezi základní ekonomická témata, neboť vyjadřují klíčový problém ekonomie, kterým je optimalizace transformace výrobních faktorů na produkty a služby, které slouží k uspokojování lidských potřeb. Ne každý, kdo se zabývá touto transformací, si uvědomuje, že se to týká produkčních funkcí, zvláště tehdy, pokud nejde o exaktní propočty. Tato monografie se zabývá zobecněnou produkční funkcí s tím, že ji odvozuje z konkrétních produkčních funkcí jak na makro, tak na mikro úrovni a dokonce i mimo ekonomii. To je dáno tím, že pracujeme s obecným problémem systému, který má své časově proměnlivé vstupy, které transformujeme na měnící se výstupy. Toto zobecnění je blízké kybernetickému¹ pojetí, které rovněž popisuje realitu jako strukturovaný systém, jehož části spolu komunikují prostřednictvím vstupů a výstupů, přičemž jsou vykazovány určité časové průběhy syntetických výstupů a vstupů, případně zpětné vazby. S uvedeného plyne velmi univerzální použití získaných výsledků.

Ekonomie se zabývá především optimalizací různých ekonomických systémů, jejichž chování lze analyzovat a prognostikovat také pomocí časově proměnných výrobních faktorů (vstupů) a produktu (výstupů). Exaktním vyjádřením této proměnlivé reality je **produkční funkce**. Její podstatou je matematické vyjádření transformace vstupů systému na jeho výstupy na různých úrovních ekonomické reality. Protože produkce je nezbytnou podmínkou uspokojování lidských potřeb, věnuje ekonomická teorie problematice produkčních funkcí velkou pozornost. Přesto, některé otázky nejsou jednoznačně zodpovězeny. Mezi ně patří např. problematika společenské optimalizace versus individuální optimalizace jednotlivých podnikatelů nebo jak vyjádřit vliv intenzivních a extenzivních faktorů na změnu výstupu, jak interpretovat váhy v rovnici růstového účetnictví apod.

Cílem této monografie je prohloubit a zobecnit teorii produkčních funkcí i jejich systematickou typologii a získané poznatky aplikovat na zdokonalení diagnostického aparátu včetně ukázek možností použití těchto poznatků. Zvláštní důraz je kladen na hledání vhodného druhu a typu agregace zejména u dvou-faktorových produkčních funkcí. Úvodní kapitola popisuje nečekaně vysokou aktuálnost produkčních funkcí. Druhá se zabývá přístupem ekonomické teorie k problematice produkční funkce, má popisnou funkci i charakter částečné literární rešerše a rozšiřuje rešerši např. do oblastí mikroekonomie a makroekonomie. Stěžejní je třetí kapitola, která obsahuje typologii produkčních funkcí opírající se o matematický aparát, přičemž obsahuje základní charakteristiku produkční funkce. Produkční funkce je zde analyzována podle

¹ Vymezení kybernetiky, viz např. (Hartl, 2000, s. 285).

počtu zahrnujících faktorů jak ve statickém, tak dynamickém tvaru. Stěžejním problémem je zde problematika vztahu (multiplikativní nebo aditivní) mezi těmito faktory, stejně jako problematika vztahu např. mezi prací a kapitálem ve výrazu pro souhrnný (total) input faktor. Pozornost je věnována rovněž interpretaci a hodnotě vah v tomto výrazu. Samostatná subkapitola je věnována multifaktorové produkční funkci KLEM. Čtvrtá kapitola se věnuje aplikacím produkční funkce na prognostické úvahy vývoje největších ekonomik světa. Pátá kapitola má teoretickou povahu, neboť se zabývá matematickým vymezením druhů a typů agregací ve statické a dynamické úloze. Šestá kapitola obsahuje málo známé či zcela nové příklady použití multiplikativní agregace. Sedmá kapitola ukazuje konstantní produkční funkci u kryptoměn a osmá kapitola obsahuje základní popis tzv. farmářské úlohy, která bude, jako dobře interpretovaný příklad použití produkční funkce, použita i v dalších kapitolách. Devátá a desátá kapitola se zabývá specifickými národohospodářskými problémy, které vychází z produkčních funkcí. Jedenáctá kapitola je věnována dosud nepublikovanému problému kvantové ekonomie, na příkladu kvantové produkční funkce. Dvanáctá kapitola se věnuje úlohám se dvěma nebo třemi aktéry, kteří mají omezené společné vstupy (zdroje, výrobní faktory apod.) O tyto zdroje se budou dělit, přičemž podle použitých produkčních funkcí, tak získají větší či menší individuální a společný výstup, který je zde zobrazován jako elementární distribuční model (EDM). Řešení je závislé na tom, zda je vstupů (zdrojů) nedostatek či přebytek. Třináctá kapitola podrobněji charakterizuje dosavadní publikační činnost na téma produkčních funkcí a související intenzity vývoje. Čtrnáctá kapitola přináší závěry a další možnosti výzkumu.

Na dané téma a na úzce související problematiku autoři již některé dílčí výstupy publikovali, proto vznikla potřeba systematicky uspořádat dosavadní výsledky výzkumu a také zařadit rozsáhlejší výklad a příklady použití, které se do dílčích publikací nevešly, avšak jsou zajímavé. Za četná doporučení děkujeme všem oponentům, kolegům i zájemcům o problematiku produkčních funkcí, která stále budí zájem mnohých odborníků z různých vědeckých a pedagogických institucí jak v České republice, tak v zahraničí. Za významnou podporu jsme vděční vedení VŠFS, zejména od paní rektorky Dr. Bohuslavy Šenkýřové, prorektora pro výzkum a vývoj prof. Ing. Mojžíra Helíška, CSc., a děkana ekonomické fakulty doc. Mgr. Ondřeje Roubala, Ph.D.

1 Aktuálnost problematiky produkčních funkcí

Lidé se začali zabývat hospodařením, ve větší míře od doby, kdy se díky vynálezu zemědělství začali usazovat na určitém území. Od chvíle, kdy si uvědomili, že se dá pěstovat nějaká plodina různě a že jsou i různé možnosti chovu zvířat i výroby potravin, vynořila se otázka, který způsob je lepší. Vzhledem k tomu, že zdokonalování těchto procesů bylo relativně pomalé, rozšiřovala se produkce, pokud to bylo potřeba, zejména extenzivně (kvantitativně), tj. pokud vzrostl počet členů kmene, vykáceli část okolního lesa a založili nové pole, na kterém hospodařili obdobně jako na předchozích. Měnil se pouze rozsah produkce. Tomu odpovídá lineární produkční funkce, produkt roste úměrně vloženým zdrojům. Způsob produkce odpovídal tehdejšímu stupni poznání přírody, jejích zákonitostí a z toho plynoucích technologií. Až později se v produkční funkci začal významněji uplatňovat kapitál, neboť přibývalo nástrojů a zařízení. Nastartoval se trvalý proces substituce práce kapitálem. Tím pádem se začala v realitě uplatňovat netriviální produkční funkce. Jak se později ukázalo, produkční funkce je vhodným nástrojem modelování vývoje také v rámci první, druhé, třetí a dnes i čtvrté průmyslové revoluce.

Podstatou hospodaření a ekonomické optimalizace je získat úspory zdrojů na jednotku užitečné produkce, při uspokojení poptávky po statcích všemi obyvateli v náležitě kvalitě. Ekonomická věda nabízí širokou paletu optimalizačních nástrojů, avšak sama ekonomie nedisponuje odbornými znalostmi o objektech výrobních procesů. K tomu potřebuje získat tyto specifické informace od odborníků v daném oboru. Například botanik nebo agrotechnik ví jakou závlivku, osvětlení, stopové prvky, živiny apod. potřebuje daná rostlina či plodina. Metalurg či chemik zná fyzikální zákonitosti výroby kovů a tavenin. Stavební inženýr ovládá zákonitosti výstavby budov, přehrad apod. Mnohé z těchto znalostí lze předat pro ekonomickou optimalizaci právě prostřednictvím produkční funkce, která tak vystupuje jako nástroj přenosu odborných informací. Tato úloha produkční funkce se s rozvojem informační společnosti nemění, jiné jsou jen způsoby zjišťování těchto informací a formy jejich přenosu i využití. Například v zemědělství jsou dnes pojízdná agrotechnická zařízení, která průběžně proměřují a verifikují produkční funkce na základě, kterých řídí (případně automaticky) závlivku, přiděl hnojiv nebo osvětlení či teplotu pokud jde o skleníkovou technologii.

Zdrojem rozvoje společnosti je rostoucí poznání lidí, které se zhmotňuje v inovacích ve všech lidských činnostech a aktivitách. Nejsou to ale pouze vynálezy, které vedou k novým výrobkům, či zdokonaleným technologiím, nýbrž je to také lepší organizace práce, účinnější management a motivace nebo využití právě těch schopností, které lidé skutečně mají atp. Cílem ekonomické optimalizace je získání synergického efektu². Aktuálnost produkčních funkcí se neztrácí ani s automatizací, robotizací či využíváním umělé inteligence. Optimalizační programy se tím spíše neobejdou bez explicitní či implicitní produkční funkce. Nasazení těchto „inteligentních“ zařízení je rovněž podrobena optimalizaci, a ta se opět neobejde bez produkční funkce.

² Právě ze synergického efektu vychází tvrzení „Není potřeba žádné vnější síly, žádného nátlaku, žádného omezení svobody, aby se mezi jednotlivci dosáhla spolupráce, když všichni z této spolupráce mohou mít prospěch“. (Pavlík, 2001, (Smith, 1776)).

2 Přístup ekonomické teorie k problematice produkční funkce

2.1 Obecná charakteristika produkční funkce

Produkční funkce jsou významnou součástí ekonomických modelů, ekonomické výuky a jsou nezbytným prostředkem ekonomické analýzy. Odborná literatura zabývající se produkční funkcí je z několika důvodů značně rozsáhlá, neboť ekonomická věda se touto otázkou zabývá již od svého vzniku. Jedním z důvodů je např. to, že produkční funkce se vyskytují na všech hierarchických úrovních ekonomiky, tj. jak na národohospodářské úrovni, tak na podnikové i na úrovni jednotlivých strojů, zařízení, výrobních systémů apod. Z matematického hlediska se produkční funkcí rozumí technologická závislost vstupů a výstupů výrobního procesu. Z mikroekonomického hlediska je produkční funkce chápána jako vztah mezi výrobními faktory a maximálním výstupem, kterého lze s danými prostředky dosáhnout. Produkční funkce tedy popisuje závislost výstupů a vstupů i na úrovni jednotlivých firem. Respektive jde o vztah maximálního možného výstupu a vstupů potřebných k jeho dosažení za dané úrovně technologie při daných výrobních postupech. Produkční funkce slouží jako podklad pro rozhodování firmy o nákupu výrobních faktorů a stanovení optimální velikosti firmy. V mikroekonomii je produkční funkce základem teorie firmy, která je zaměřena na velikost výstupu a rozhodování o volbě výrobních faktorů. Tato teorie se zabývá také určením optima velikosti nákladů. Při rozhodování je zohledňována délka období. Na makroekonomické úrovni hovoříme o agregátní produkční funkci, kterou získáváme agregací produkčních funkcí na úrovni firem. Jinak řečeno, agregátní produkční funkce představuje vztah mezi celkovým výstupem ekonomiky a množstvím práce, kapitálu, přírodních zdrojů a úrovní technologií potřebnou k jeho dosažení.

Z historického hlediska je problematika produkční funkce komplikovaným tématem např., protože se různily názory ekonomů na způsoby agregace dílčích vstupů či výrobních faktorů. Stručně lze konstatovat, že některé explicitní, a tím více implicitní zmínky o produkční funkci jsou ovšem velmi starého data. Větší pozornost byla věnována pod proporcionální³ produkční funkci, vyjadřující zákon klesajících mezních výnosů, viz např. Xenofon, 355 př. n. l. Již v roce 1767 sympatizant francouzských fyziokratů A. R. J. Turgot (1844) implicitně popsal scénář celkového produktu charakterizovaný kladnou první parciální derivací a negativní druhou parciální derivací. O třicet let později T. Malthus (1798) prezentoval své aritmetické a geometrické poměry, jimiž implikoval logaritmickou produkční funkci. D. Ricardo (1817) podložil svá vysvětlení trendu relativních podílů ve fázi, kdy se ekonomika přibližuje klasickému stacionárnímu stavu, numerickými příklady vycházejícími z kvadratické produkční funkce. Přibližně ve stejném období zkoumal průkopník marginalizmu J. H. von Thünen (1930) geometrické řady klesajících mezních produktů implikujících exponenciální produkční funkci. V roce 1850 vyjádřil von Thünen rovnicí výstup na

³ Pod proporcionální (konvexní) funkce je sice s rostoucími vstupy také rostoucí, avšak roste stále pomaleji, tj. l. derivace je s rostoucími vstupy klesající. Nad proporcionální (konkávní) produkční funkce roste naopak stále rychleji, tj. l. derivace je také rostoucí. Z toho plyne, že neutrální z hlediska proporcionality je rostoucí přímka, která roste stále stejným tempem.

dělníka jako funkci kapitálu na dělníka – vztah obsahově analogický s Cobbovou-Douglasovou produkční funkcí. V roce 1882 připojil A. Marshall agregátní produkční funkci k prototypu neoklasického růstového modelu. Od poloviny 90. let 19. století do počátku 20. století skupina ekonomů zahrnující i P. Wicksteeda (1894), E. Baroneho (1896) nebo K. Wicksella (1900, 1901, 1902) použila produkční funkce k důkazu tvrzení, že součet plateb výrobním faktorům rozdělených podle jejich mezní produktivity přesně vyčerpává celkový produkt. Matematickou verifikaci tohoto důkazu ale poskytl až A. W. Flux (1894). „Flux vztáhl tento problém k Eulerovu teorému a ukázal, že produkt je vyčerpán mezními produkty výrobních faktorů jen v případě, je-li produkční funkce lineárně homogenní, jinými slovy, v případě konstantních výnosů z rozsahu.“ (Kolman, 1999, s. 298–299.)

S industrializací postupující ze Spojeného království na kontinent se důraz ekonomické teorie přirozeně přesunul od zemědělství k průmyslové výrobě. Akumulace kapitálu se dostala blíže k ohnisku pozornosti tehdejších ekonomů, zatímco kultivace půdy zůstala poněkud stranou. Např. E. von Böhm-Bawerk (1959) si představoval akumulaci kapitálu jako kontinuální zvyšování zprostředkovaných (oklikových) metod výroby a nadnesl problematiku substituce kapitálu za práci. V této verzi se používá mezní princip a princip klesajících výnosů takovým způsobem, že se z nich stávají, vzájemně neodlišitelné součásti jediné koncepce. Další rozvoj problematiky produkční funkce je spojen se jménem A. Marshalla. V jeho textech z let 1867–1890 se objevuje agregátní produkční funkce, v níž figuruje jak práce a půda, tak také kapitál. V této agregátní produkční funkci Marshall použil derivaci proměnných podle času, čímž předběhl Tinbergen a Solowa a vytvořil de facto první neoklasický růstový model. Zavedení času Marshallovi umožnilo také zformulovat teorii rozdělování důchodu. Protože se dostupnost výrobních faktorů může v čase měnit a nabízená množství jsou určena cenou, liší se podle Marshalla mechanismus rozdělování důchodu od principu mezní produktivity. Produkční funkce hrála významnou roli v neoklasických modelech ekonomického růstu (viz např. Solow 1956, 1957, Swan 1956), v tzv. sporu dvou Cambridge o povaze kapitálových statků i v dalších oblastech.

Zmiřme ještě stručně některé další přístupy. Keynesovské teorie růstu se zaměřovaly na podmínky současné plné zaměstnanosti práce a kapitálu, v tzv. rovnovážném růstu na ostří nože (R. Harrod, 1939; E. D. Domar, 1944; M. Kalecki, 1939; N. Kaldor; J. Robinsonová). Neoklasický model (R. M. Solow; J. Kendrick; E. Denison) vyvíjený od 50. let 20. století zkoumal tzv. stav stálého růstu, ve kterém dochází k vyrovnání tempa růstu kapitálu, práce a produktu a to v situaci bez technického pokroku⁴. Naproti tomu růst produktu na obyvatele je podmíněn technickým pokrokem, chápánem zde jako exogenní faktor (též Solow-Swan, RCK, Mankiw-Romer-Weil, Romerův „learning-by-doing“, R&D modely). Nestandardní přístup formovala škola mezí růstu, zejména závěry Římského klubu, který dospěl k názoru, že limity růstu jsou dány vyčerpáním neobnovitelných přírodních zdrojů, znečištěním životního prostředí a z toho plynoucí omezené možnosti obživy (D. a D. Meadowsovi a další). Další etapou je teorie endogenního růstu, (např. P. M. Romer, 1983, R. Lucas, De Long), podle které je růst produkce na obyvatele ovlivněn kromě tradičních, neoklasických faktorů tzv. pozitivními externalitami (externími efekty) z investic do lidského kapitálu, které vedou

⁴ Technický pokrok je zde chápán jako zdroj rostoucí produktivity (efektivnosti).

k rostoucím výnosům z rozsahu. Technický pokrok je tak funkcí investic do vzdělání, ale i výdajů na výzkum a vývoj a dalších kvalitativních faktorů.

Další vývoj přinesl řadu konkrétních formulací produkčních funkcí. Některé jsou zmíněny v dalším textu.

V souhrnu lze tedy konstatovat, že produkční funkce jsou významné nástroje ekonomické analýzy jak v oblasti makroekonomie tak i oblasti mikroekonomie. Obecně vyjadřují závislost výstupů na vstupech za určitých podmínek. Jedna z definic říká, že produkční funkce vyjadřuje vztah⁵ mezi vstupy a maximálním množstvím výstupu, kterého lze dosáhnout na současné úrovni technologického pokroku. Technologickým pokrokem se rozumí způsob přeměny vstupů na výstupy (Holman, 2002). Jiná definice konstatuje, že produkční funkci charakterizujeme jako vztah mezi množstvím vstupů, které byly použity při výrobě v daném období, a maximálním objemem výstupu, který vstupy svým fungováním v daném období vytvořily (Hořejší, 2006). Výstupem produkční funkce je bez ohledu na to, zda se jedná o mikroekonomické nebo makroekonomické pojetí produkt. Za vstupy jsou považovány výrobní faktory, kterými jsou dle (Hořejší, 2006): práce (L), kapitál (K), půda (La). Z hlediska vstupů přitom teorie předpokládá následující vlastnosti:

- Substituce⁶: některé vstupy jsou chápány jako substituty, kde jeden vstup lze nahradit druhým.
- Komplementarita⁷: některé vstupy jsou chápány jako komplementy, kdy k produkci daného množství výstupu jsou zapotřebí dva nebo více vstupů v určitém poměru.
- Specifičnost⁸: konkrétní vstup lze zpravidla použít k produkci omezeného množství výstupu.
- Časovost: z hlediska času platí, čím delší časové období, tím má producent větší možnost volit vstupy pro svoji produkci.

Při konstrukci a odhadu parametrů produkčních funkcí se dále vychází z určitých apriorních předpokladů, kdy se obvykle (Veselý, 2005) požaduje splnění těchto podmínek (x jsou zde obecně proměnné produkční funkce): $f(\mathbf{x}) \geq 0$, je-li \mathbf{x} ($x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$) ≥ 0 , $f(\mathbf{x})$ je konečná spojitá neklesající funkce, pro $f(\mathbf{x})$ existují spojitě parciální derivace aspoň druhého řádu, přičemž pro každé $i = 1, 2, \dots, m$, platí:

$$f'_i = \frac{\delta f(x)}{\delta x_i} > 0, f''_{ii} = \frac{\delta^2 f(x)}{\delta^2 x_i} < 0 \quad (1)$$

První podmínka znamená, že objem produkce na mikroekonomické i makroekonomické úrovni roste při zvětšení objemu kteréhokoliv výrobního faktoru, zůstává-li objem ostatních faktorů nezměněn. Splnění druhé podmínky lze interpretovat tak, že křivka produkce y je pro libovolný i -tý výrobní faktor konkávní, takže zvětšení objemu jednoho faktoru při konstantním objemu zbývajících výrobních

⁵ Viz např. Velká ekonomická encyklopedie (Žák, 2002, s. 613).

⁶ Dlouhodobě dochází k substituci práce technikou. Krátkodobě může být efektivní i opačný proces.

⁷ Komplementy jsou např. části produktu (výrobku), jejichž vzájemný poměr je často také předmětem optimalizace.

⁸ Např. vsázka do sklářské pece je velmi citlivá na složení, neboť ovlivňuje vlastnosti skloviny.

faktorů vede ke klesajícím přírůstkům objemu produkce, tj. jde o pod proporcionální funkci⁹.

V souhrnu lze tedy konstatovat, že během historie přišli různí ekonomové s rozdílnými druhy produkčních funkcí, které se lišily vstupy, počtem uvažovaných vstupů, způsoby jejich agregace, interpretací nebo způsoby jejich měření (detaily viz např. Mishra 2010, Felipe a McCombie 2015, Sickels a Zelenyuk 2018). Podstatné je časové období, zda je některý ze vstupů fixní (krátké časové období) nebo zda jsou všechny vstupy variabilní (dlouhé časové období). Historicky byla pozornost věnována především pod proporcionální produkční funkci, vyjadřující zákon klesajících mezních výnosů. V realitě se však lze setkat i s nad proporcionální produkční funkcí, kdy přinejmenším po určitou dobu (do inflexního bodu) tempo růstu vstupů vede k vyššímu tempu růstu výstupu než je tempo vstupů, viz např. (Wöhe a Kislingerová, 2007). Další rozlišení je, zda produkční funkce má pouze jeden výstup nebo několik výstupů. V případě produkční funkce s jedním výstupem se lze setkat např. s CES produkční funkcí (kdy je elasticita substituce jednotlivých výrobních faktorů konstantní), s Liuovou a Hildebrandovou produkční funkcí, Revenkarovou produkční funkcí, Diewertovou produkční funkcí, translogaritmičnou produkční funkcí, produkční funkcí, MFM produkční funkcí (tyto funkce mají variabilní míru substituce jednotlivých výrobních faktorů). Za zmínku zde stojí Satoova produkční funkce předpokládající, že kombinace vstupů ovlivňuje nejen úroveň výstupu, ale i hodnotu technologického pokroku. Produkční funkce s více výstupy obvykle jako další výstup uvažují znečištění životního prostředí nebo jiné podobné aspekty, viz např. multifaktorová produkční funkce KLEM (subkapitola 3,6).

2.2 Obecná charakteristika mikroekonomické produkční funkce

Mikroekonomických produkčních funkcí je více typů. Navzájem se liší se v několika ohledech. Prvním z nich je otázka typů, množství a jednotek vstupů a výstupů. Druhým je funkční forma. Třetím je otázka délky časového období, pro které je funkce sestavována, z čehož vyplývá, které vstupy jsou považovány za fixní a které za variabilní. Obecně lze produkční funkci vyjádřit (Holman 2002) jako:

$$Y = f(K, L, \dots). \quad (2)$$

Takto definovaná produkční funkce disponuje následujícími vlastnostmi:

- Výstup může být vyroben různými kombinacemi vstupů.
- Ukazuje technologická omezení výroby, protože vychází z dané úrovně technologie.
- Nepředpokládají se zbytečné a neefektivní výrobní procesy.

⁹ Této problematice je věnována zejména subkapitola 12.3, která podrobně rozebírá polynomičké produkční funkce, která může mít též inflexní bod, který jí dělí na část konvexní (nad proporcionální) a část konkávní (pod proporcionální).

V mikroekonomickém pojetí se často tento obecný přístup redukuje na funkci, jejímž jediným výstupem je produkt (Q) a jež má dva vstupy: kapitál (K) a práci (L). Ačkoliv je tento vztah v podstatě fyzický a vstupy a výstupy mají různé fyzikální jednotky, lze je agregovat tím, že jím přiřadíme cenové váhy¹⁰. Takto můžeme pracovat se vstupy a výstupy v monetárních jednotkách (Mishra, 2010). Konstatujme přitom, že teorie (např. Hušek, 2009) předpokládá, že firma s omezenými vstupy usiluje o maximalizaci produktu, tedy o maximální množství produkce, které lze s danými vstupy vyprodukovat. Dvoufaktorovou produkční funkci můžeme potom vyjádřit jako

$$\max Y = f(K, L). \quad (3)$$

Samozřejmě platí, že firma může v realitě produkovat menší množství produkce, než je maximální, např. nemá momentální odbyt a nechce zvyšovat zásoby. V krátkém období, kdy mj. neuvažujeme s technickým pokrokem, ale nemůže produkovat více než je její kapacita, která je pro určité množství vstupů dána produkční funkcí. Z tohoto pohledu potom platí (Žák, 2002), že produkční funkce vyjadřuje vztah mezi maximálním množstvím produkce, které může být vyrobeno a množstvím výrobních faktorů, které jsou potřebné k výrobě této produkce. Body nad produkční funkcí jsou danou technologií nedosažitelné, zatímco body pod produkční funkcí jsou technicky proveditelné na stanovené úrovni využití vstupu. Konstatujme ještě, že technický pokrok přitom chápeme v širším pojetí obdobně jako (Solow, 1957, s. 312), který uvedl¹¹: „Výraz technická změna používáme na zkrácené vyjádření libovolného druhu změny v produkční funkci. Tak pokles, zrychlení, zdokonalení ve výchově pracovní síly se projeví jako technická změna“. Obecně řečeno z hlediska maximalizace produktu platí, že body nad produkční funkcí jsou danou technologií nedosažitelné, zatímco body pod produkční funkcí jsou technicky proveditelné na stanovené úrovni využití vstupu.

Zdůrazněme dále, že proces přeměny vstupů ve výstup je také podmíněn okolními vlivy, např. prostředím technickým, sociálním, legislativním nebo behaviorálním. Názorným příkladem může být fungování podniku stejného charakteru v prostředí tržní ekonomiky a centrálně řízené, kde stanovené cíle firmy a také i samotný výrobní program nebo charakter výsledku činnosti mohou být odlišně orientované (maximální zisk na jedné straně a maximální obrat na straně druhé). Bezpochyby v jakémkoliv prostředí, ať je to tržní ekonomika nebo plánovaná, nesmíme zapomenout, že výrobní činnost je značně omezená technickými prostředky a dostupnými technologiemi. Svou roli hrají i aspekty sociální. Protože produkční funkce počítá s faktorem práce, můžeme snadno odvodit, že výstup produkce bude také záviset např. na motivaci pracovníků, systému řízení, způsobu odměňování apod. Možnosti použití dvoufaktorové neoklasické substituční produkční funkce jsou¹² obecně následující (Hušek, 2007):

1. Určení efektivity jednotky libovolného výrobního faktoru při konstantní úrovni druhého pomocí charakteristik mezní produktivity každého z nich.

¹⁰ Agregace tak probíhá na principu převodu faktorů na náklady, které jsou již sčitatelné.

¹¹ Jedná se o vlastní překlad.

¹² Některé ze zde uvedených možností použití jsou rozebrány v dalších subkapitolách této kapitoly.

2. Kvantifikace vzájemné zaměnitelnosti výrobních faktorů a jejich důsledků pro daný objem produkce. K tomu slouží ukazatele jako mezní míra substituce nebo pružnost substituce faktorů.
3. Stanovení charakteru výnosů z rozsahu na základě stupně homogenity produkční funkce.
4. Vymezení podmínek optimalizace výrobního procesu, tj. nalezení takového výrobního programu firmy, který zaručuje v podmínkách plné konkurence a při známých cenách jednotky produkce a obou výrobních faktorů maximální zisk.
5. V případě dynamické produkční funkce měření vlivu technického pokroku a jeho různých forem na dynamiku produkce.

Z hlediska období se u dvoufaktorové produkční funkce obvykle uvažuje, že množství kapitálových statků nelze v krátkém období měnit, v dlouhém ano. Délka krátkého období se u jednotlivých firem bude lišit, obecně platí, že čím je produkce kapitálově náročnější, případně vzdálenější konečnému spotřebiteli, tím je krátké období delší. U jednofaktorové produkční funkce je variabilní proměnnou objem práce, který je možno změnit poměrně rychle a jednoduše (Holman, 2002). Produkční funkce v krátkém období potom vyjadřuje, jak se mění výstup (produkt Q) v závislosti na změnách variabilního vstupu (práce L). Matematicky (Hořejší, 2006):

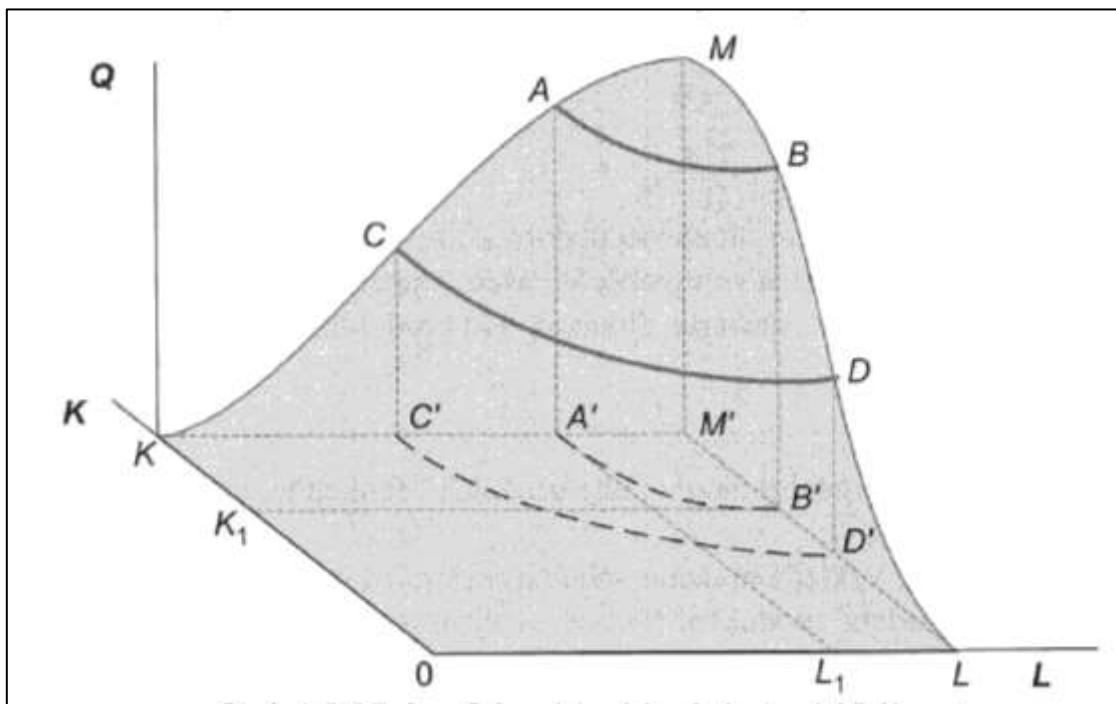
$$Q = f(L). \quad (4)$$

Pro dlouhé časové období platí, že se jedná o časově neurčený interval, ve kterém jsou všechny vstupy považovány za variabilní (Buchta, 2006). Dlouhodobá produkční funkce zachycuje vztah mezi změnou objemu všech používaných vstupů a následnou změnou výstupu. Cílem firmy je vybrat takovou kombinaci výrobních faktorů, která zajistí dosažení efektivní produkce za podmínky maximalizace zisku. Omezujícími faktory jsou technologické možnosti nebo rozpočtová omezení. Prostřednictvím produkční funkce lze určit, jaký objem produkce vytvoříme při proměnlivých množstvích vstupů (Schiller, 2004). V dlouhém období tedy může firma vstupy navzájem nahrazovat neboli substituovat. Pokud zúžíme pohled na dlouhodobou produkční funkci na vztah mezi současným proporcionalně stejným růstem objemu všech vstupů a změnou výstupu, hovoříme o výnosech z rozsahu. Základními vlastnostmi produkční funkce v dlouhém období proto jsou: a) substituce vstupů, b) výnosy z rozsahu vstupů.

K vykreslení dvoufaktorové produkční funkce v dlouhém období je potřeba trojrozměrného grafu, v němž jsou na dvou osách používané výrobní faktory (zde jde o práci (L) a kapitál (K)) a na třetí maximální výstup (Q). Takovýto graf se nazývá produkční kopec. Lze ho transformovat promítnutím do roviny na takzvanou mapu izokvant produkce. Izokvanty stálé produkce jsou křivky, které spojují takové kombinace vstupů, které mají stejný maximální výstup (produkt). Mapa izokvant má tedy dvě osy, které znázorňují množství jednotlivých výrobních faktorů a stanovené množství izokvant s připojeným číslem, které představuje množství výstupu (produktu Q), jež izokvanta představuje (Ševela, 2012). Posunem po izokvantě je znázorněna substituce vstupů a poměr změn ve faktorech se nazývá mezní míra technické substituce (MRTS), jejíž velikost odpovídá sklonu křivky (směrnice tečny v daném bodě). Ve tvaru izokvanty se projevuje např. zákon klesající mezního produktu, na

jehož základě MRTS klesá s tím, jak jeden z vstupů roste a druhý klesá. V důsledku těchto předpokladů jsou izokvanty výstupů (produktu Q) uvnitř ekonomické oblasti klesající a konvexní směrem k počátku (Soukup, 2012). Příklad produkčního kopce je znázorněn na obrázku 1.

Obrázek 1: Produkční kopec



Zdroj: Hořejší (2006)

Při praktickém využití produkčních funkcí na mikroekonomické úrovni vyvstává otázka, jak jsou definovány vstupy a výstupy. Existují totiž rozdílné přístupy a ty způsobují, že výsledné odhady produkčních funkcí nejsou úplně srovnatelné, i když jsou založeny na stejných teoretických základech. Například za výstup (Q) lze považovat celkové tržby, jak např. využívá (Husain, 2016), nebo vytvořenou přidanou hodnotu, jak výstup definuje např. (Koláčková, 2013). U proměnné práce (L) lze využít agregace pomocí peněžních jednotek a definovat ji jako celkové náklady na zaměstnance (Koláčková, 2013), nebo ji lze definovat pouze jako počet zaměstnanců firmy, jak činí např. (Husain, 2016). Bez ohledu na rozdíly zde uvedených přístupů¹³ ale platí, že mikroekonomická produkční funkce usiluje o analýzu toho, jak jednotlivé faktory přispívají k celkové produkci firmy.

2.3 Využití mikroekonomické produkční funkce

Mikroekonomickou produkční funkci lze využít v řadě aplikací. V různých aplikacích se optimalizuje jiná veličina, např. maximalizace zisku, minimalizace nákladů, maximalizace produkce, maximalizace efektivnosti apod. Typickým příkladem je

¹³ V odstavci uvedená literatura je pouze reprezentativním příkladem mnoha publikací. Viz také učebnice (Wawrosz, 2010).

problematika maximalizace zisku respektive minimalizace nákladů. Cíl maximalizace zisku můžeme vyjádřit, jako (Hušek, 2007):

$$Z = p \cdot Y - i \cdot K - w \cdot L, \quad (5)$$

kde (z) je zisk, (p) je cena jednotky produkce, (i) jsou náklady na jednotku kapitálu a (w) jsou náklady práce, např. hodinová mzda. Pokud budeme dodržovat předpoklady dokonale konkurenčního trhu, tzn., že firma tyto ceny přijímá z trhu (je tzv. *price taker*), pak dostaneme neomezenou maximalizační úlohu, která má tvar:

$$\max_{K,L} Z = p \cdot Y - i \cdot K - w \cdot L \quad (6)$$

Nutnými podmínkami prvního řádu pro maximum zde jsou:

$$\frac{\delta Z}{\delta K} = p \cdot \frac{\delta y}{\delta K} - i = 0, \quad \frac{\delta Z}{\delta L} = p \cdot \frac{\delta y}{\delta L} - w = 0 \quad (7)$$

Pro splnění obou výše uvedených rovnic musí platit:

$$\frac{\delta y}{\delta K} = \frac{i}{p}, \quad \frac{\delta y}{\delta L} = \frac{w}{p}, \text{ přičemž první výraz bude označen jako } f_L \text{ a druhý jako } f_K.$$

Z obou výrazů lze odvodit jednoznačný závěr, že mezní produktivity faktorů za účelem maximalizace produktu se musí rovnat jejich reálným cenám, neboli podílům cen faktorů a produkce. Pokud tato rovnost není splněna, pak využití těchto faktorů není efektivní, tzn., že firma za daných podmínek maximálního zisku nedosahuje. Při výše uvedených podmínkách lze dokázat, že celkový výstup měřený v peněžních jednotkách se musí rovnat součtu ceny kapitálu a ceny práce. K tomuto vztahu se dostaneme dosazením výše uvedených výrazů do následujícího výrazu (plynouceho z Eulerovy věty o homogenních funkcích):

$$Y = \frac{\delta Y}{\delta K} \cdot K + \frac{\delta Y}{\delta L} \cdot L \quad (8)$$

$$Y = f_K \cdot K + f_L \cdot L \quad (9)$$

$$Y = \frac{i}{p} \cdot K + \frac{w}{p} \cdot L \quad (10)$$

$$p \cdot Y = i \cdot K + w \cdot L \quad (11)$$

Problematiku minimalizace nákladů (C) za předpokladu, že ceny faktorů jsou předem známé, lze formulovat jako:

$$\min_{K,L} C = i \cdot K + w \cdot L, \quad (12)$$

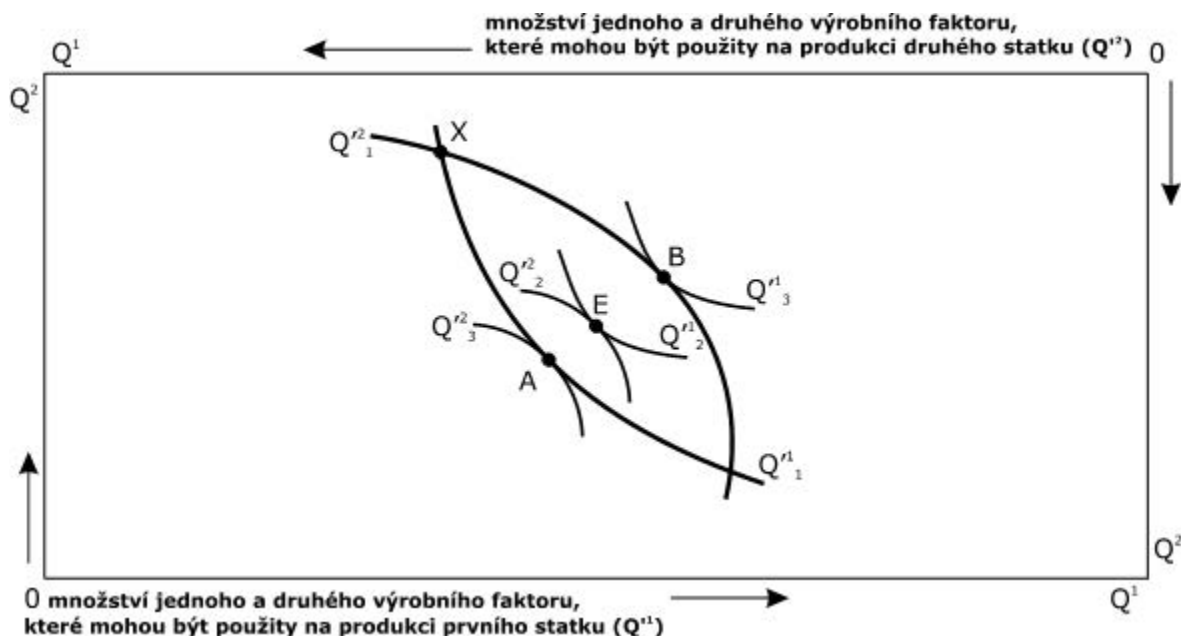
vzhledem k danému množství produkce Y . Nutné podmínky pro minimum nákladů C jsou splněné, pokud platí následující vztahy:

$$MMS_{K,L} = \frac{\frac{\delta Y}{\delta K}}{\frac{\delta Y}{\delta L}} = \frac{f_K}{f_L} = \frac{i}{w}, \text{ respektive } MMS_{L,K} = \frac{\frac{\delta Y}{\delta L}}{\frac{\delta Y}{\delta K}} = \frac{f_L}{f_K} = \frac{w}{i} \quad (13)$$

Dané vztahy lze interpretovat tak, že mezní míry substituce výrobních faktorů se mají rovnat podílu jejich jednotkových cen. Zde uvedené souvisí s problematikou izokvant

stálé produkce. Ty lze použít při znázornění problematiky stanovení optimálního množství vstupů při produkci dvou statků, kdy ekonomická teorie řeší otázku, zda lze najít takovou kombinaci vstupů, při které nelze zvýšit produkci jednoho statku jinak než na úkor snížení produkce druhého statku. K výše uvedenému se využívá tzv. krabicový diagram (anglicky Edgeworth box), kdy izokvanty množství jednoho statku mají počátek v levém dolním rohu diagramu, izokvanty množství druhého statku mají počátek v pravém horním bodu diagramu. V bodech, kde se izokvanty množství prvního a množství druhého statku dotýkají (mají společnou tečnu), nelze zvýšit produkci jednoho statku jinak než na úkor snížení produkce druhého statku. Názorně to vyjadřuje obrázek 2. V bodě X není rozdělení výrobních faktorů optimální – nemaximalizujeme produkci žádného statku. Pokud se z bodu X přesuneme do bodu A (tj. změním rozdělení vstupů mezi výstupy), tak zvýšíme produkci druhého statku (budeme na izokvantě Q^2_3 místo na izokvantě Q^2_1) a nesnížíme produkci prvního statku (budeme stále na izokvantě Q^1_1). Přesunem z bodu X do bodu B pak zvýšíme produkci prvního statku (budeme na izokvantě Q^1_3 místo na izokvantě Q^1_1) a nesnížíme produkci druhého statku (budeme stále na izokvantě Q^2_1). Pokud se přesuneme z bodu X do bodu E , ve kterém se střetávají izokvanty Q^1_2 a Q^2_2 , tak zvýšíme produkci jak prvního tak druhého statku – v případě prvního statku se přesuneme z izokvanty Q^1_1 na izokvantu Q^1_2 a v případě druhého statku se přesuneme z izokvanty Q^2_1 na izokvantu Q^2_2 . Matematicky mají v bodech dotyku izokvanta množství prvního statku a izokvanta množství druhého statku stejnou mezní míry technické substituce MRTS, která určuje sklon společné tečny v tomto bodě.

Obrázek 2: Využití izokvant při hledání maxima produkce prvního i druhého statku



Zdroj: Heissler, Valenčík, Wawrosz (2010)

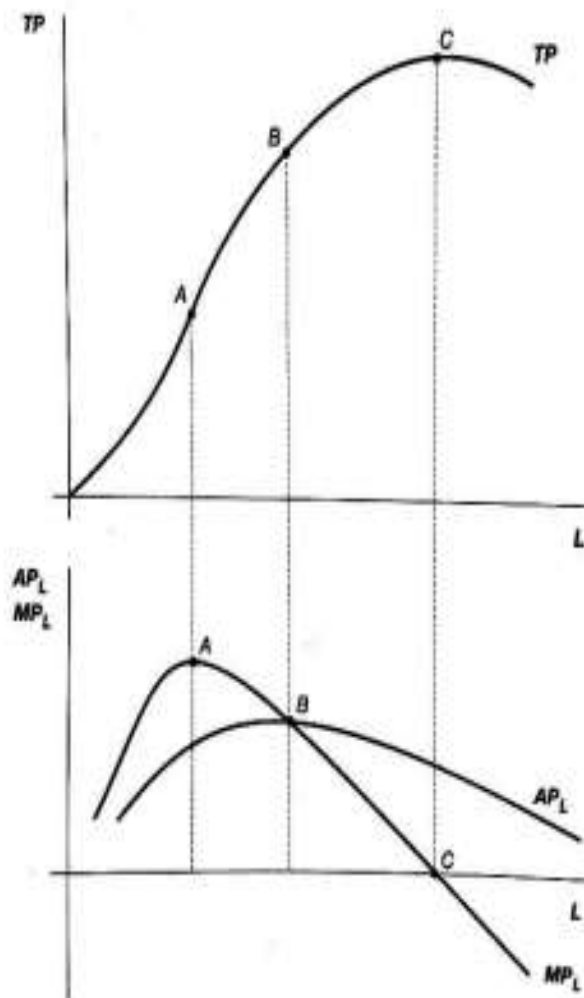
Ekonomickou teorii při využití produkčními funkce v krátkém období zajímá celkový, mezní a průměrný produkt. Celkový produkt je vyjádřením celkového fyzického výstupu. Průměrný produkt (AP) ukazuje objem produkce vyrobený jednou jednotkou výrobního faktoru a mezní produkt (MP) vyjadřuje, o kolik se změní výstup zapojením

dodatečné jednotky vstupu (Macáková, 2010). Matematicky, pokud předpokládáme jako variabilní faktor práci, platí:

$$AP = \frac{TP}{L}, \quad MP = \frac{\Delta TP}{\Delta L}, \quad (14)$$

kde TP je celkový produkt, AP je průměrný produkt, MP je mezní produkt. Graficky jsou vztahy mezi celkovým, mezním a průměrným produktem vyjádřeny na obrázku 3. Konstatujeme zde, že jakkoliv v případě produkční funkce firmy může teoreticky nastat stav, kdy zvětšení jednoho vstupu vede k poklesu výstupu (tedy vývoj za bodem **C** na obrázku 3, kdy je celkový produkt klesající), např. proto, že v důsledku limitu fixních vstupů dojde k tomu, že jednotky variabilního vstupu si začnou škodit, v praxi by daná situace měla být spíše výjimečná. Racionálně jednající firma¹⁴ v takovém případě množství variabilního vstupu sníží.

Obrázek 3: Vztah celkového, mezního a průměrného produktu



Zdroj: Hořejší (2006)

¹⁴ Přístupy, které poukazují, že např. v situaci, kdy je firma řízena manažery, je velká se spoustou stupňů řízení, může stav, že zvětšení vstupů vede k poklesu produkce (respektive k poklesu příjmů a zisku), jsou mimo předmět zájmu tohoto textu.

2.4 Produkční funkce v makroekonomii

2.4.1 Obecná charakteristika makroekonomické produkční funkce

Definovat produkční funkci na úrovni firem není tak složité, jako vymezit tutéž problematiku na úrovni průmyslu, odvětví anebo celé ekonomicky¹⁵. Agregovaná produkční funkce se získá jako množství výrobních faktorů a výstupu agregací prostřednictvím individuálních firem v dané ekonomice, odvětví apod. Použití agregátní produkční funkce má svá úskalí. Jelikož se jednotlivé firmy liší ve své produkci, odlišné struktuře nákladů a dalšími parametry, může dojít ke zkreslení produkční funkce agregátní úrovně (Mishra, 2007). Jak dále upozorňují četní autoři, teorie produkční funkce obvykle předpokládá snadnou zastupitelnost kapitálu a práce, a to za podmínky homogenosti jak práce, tak i kapitálu. V otázkách využití agregátních produkčních funkcí ale nemusí být jasné, zda opravdu vystihují realitu.

Přes zde uvedené námitky je však agregátní produkční funkce využívána v teoretické i aplikované analýze a prognóze hojně. V rámci hlavního neoklasického proudu makroekonomie je agregátní produkční funkce základem ekonomického růstu, teorie reálných hospodářských cyklů nebo krátkodobé poptávky po práci (Felipe, 2014). Agregátní produkční funkce je obecně základem neoklasických teorií. Tyto funkce jsou využity v Solowově modelu ekonomického růstu, je základem poptávkové strany trhu práce nebo teorie reálných hospodářských cyklů. V praxi je centrálními bankami využíváno produkčního přístupu pro získání potenciálního produktu ekonomiky. Koncept potenciálního produktu je odrazovým můstkem pro monetární a fiskální politiku, jelikož se jedná o ukazatele, které odráží nabídkovou stranu ekonomiky a jeho působení na udržitelný a neinflační ekonomický růst. Produkční funkce je také významným nástrojem pro měření produktivity včetně výpočtu souhrnné produktivity faktorů, která může být dále využívána v teorii ekonomického růstu.

Pro agregátní produkční funkci platí následující. Výstup (hrubý domácí produkt, HDP) závisí přinejmenším na následujících faktorech (konkrétní produkční funkce nemusí některé z těchto faktorů brát do úvahy):

- Fyzický kapitál: stroje, výrobní zařízení atd., které se používají ve výrobě.
- Práce: počet hodin odpracovaných v celé ekonomice.
- Lidský kapitál: dovednosti a vzdělání obsažené v pracovní síle ekonomiky.
- Znalosti: základní vědecké znalosti a plány popisující dostupné výrobní procesy.
- Sociální infrastruktura: obecné obchodní, právní a kulturní prostředí.
- Množství přírodních zdrojů dostupných v ekonomice.
- Případně cokoliv dalšího, co přispívá k produkci a jejímu růstu.

V souhrnu lze potom agregátní produkční funkci definovat následovně (Jurečka a kol., 2010): Agregátní produkční funkce kombinuje práci (L) a reálný kapitál (K) jako vstupy a tyto vstupy dává do souvislosti s výstupem v podobě reálného agregátního produktu ekonomiky (Y). Agregátní produkt je dále ovlivňován produktivitou práce a kapitálu, jež odráží úroveň technologie dostupné v ekonomice (A), pak $Y = f(K, L, A)$. (Blanchard, 2016) definuje v nejjednodušší podobě agregátní produkční funkci jako závislost

¹⁵ Viz také učebnice (Wawrosz, 2012).

produktu (Y) na množství kapitálových statků (K) a práce (L), kdy specifikuje, že K je suma budov, strojů a dalších fyzických věcí sloužících k produkci statků, L je počet dělníků. Dodává, že další významný faktor, který determinuje velikost výstupu je stav technologie.

Teorie např. (Gordon, 2014) obecně předpokládá, že u agregátní produkční funkce nenastává situace, že by přírůstek vstupů (nebo některého ze vstupů) vedl k poklesu výstupu. Mezní produkt tedy není záporný (nedostaneme se za bod **C** na obrázku 3). Teorie ale předpokládá platnost zákona klesajícího mezního produktu, kdy zvětšování jednoho vstupu vede k menším přírůstkům výstupu. (Blanchard, 2016) explicitně na otázku, co se stane, pokud roste jen jeden ze vstupů, odpovídá, že je rozumné předpokládat, že výstup poroste. Neustálé zvyšování množství vstupu ale povede ke stále menším přírůstkům výstupu. (Blanchard, 2016) v rozšířené verzi produkční funkce kromě technologického pokroku pracuje s lidským kapitálem (HC):

$$Y = f(A, K, L, HC), \quad (15)$$

přičemž předpokládá, že dodatečná jednotka lidského kapitálu dříve nebo později začne přinášet menší přírůstek produktu než předcházející jednotka. Zdůrazňuje přitom, že lidský kapitál stejně jako fyzický kapitál může zastarat, respektive může být zničen, nicméně na rozdíl od fyzického kapitálu, kde platí závislost, čím více je fyzický kapitál používán, tím je větší pravděpodobnost, že dojde k jeho opotřebení, u lidského kapitálu v zásadě platí: čím více je vy/po-užíván, tím větší je šance, že bude uchován. Dodejme ještě, že (Blanchard, 2016) u technologického pokroku předpokládá následující vztahy:

- Technologický pokrok snižuje množství osob, které jsou nutné k vyprodukování určitého množství výstupu.
- Technologický pokrok zvyšuje hodnotu výstupu, kterou lze vyprodukovat s daným množstvím osob.

Na první pohled by se mohlo zdát, že technologický pokrok vede ke zvětšení nezaměstnanosti, vždyť stejné množství produkce lze vyprodukovat s menším počtem osob. Tato závislost se může (zdůrazněme *může*, ale *nemusí*) projevit pouze v krátkém období. Ve středním a dlouhém období se díky technologickému pokroku množství vyprodukovaných statků zvětšuje a zvyšuje se rovněž množství potřeb, které lze prostřednictvím technologického pokroku uspokojit. Z hlediska modelu AS a AD dochází v důsledku technologického pokroku posunu obou křivek vpravo. Z tohoto pohledu technologický pokrok přispívá k uchování zaměstnanosti, respektive umožňuje zaměstnat i osoby, u kterých to dříve (při nižší úrovni technologického pokroku) nebylo možné.

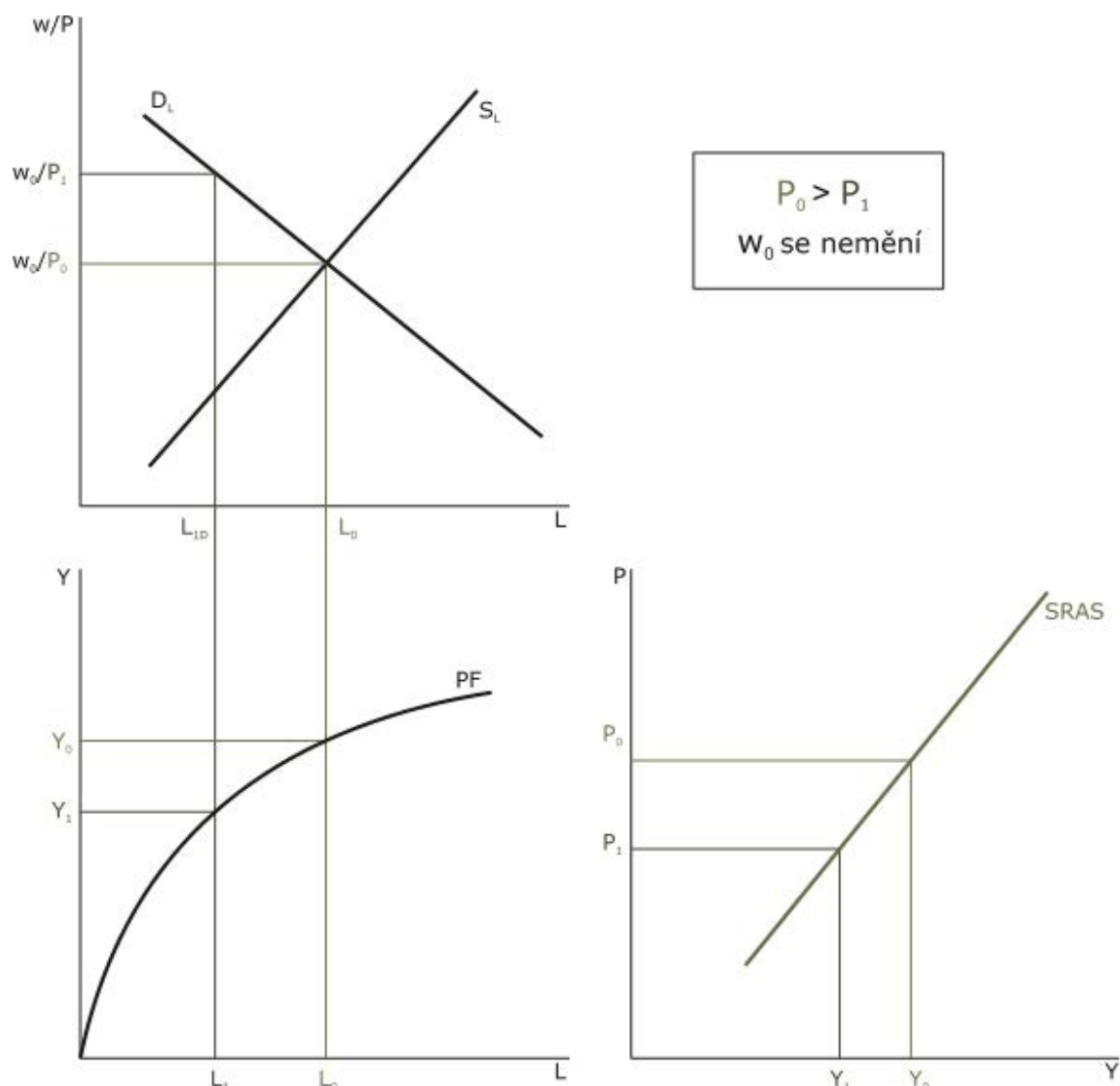
2.4.2 Využití makroekonomické produkční funkce

V této subkapitole si ukážeme jedno využití makroekonomické produkční funkce: k odvození krátkodobé křivky agregátní nabídky (křivky **SRAS**). Odvození je znázorněno na obrázku 4.

V horním grafu je znázorněn trh práce. Na svislé ose je reálná mzda w/P . Na vodorovné ose měříme počet zaměstnaných osob, zjednodušeně množství práce (L).

D_L je poptávka po práci ze strany zaměstnavatelů a S_L je nabídka práce ze strany zaměstnanců.

Obrázek 4: Vztah celkového, mezního a průměrného produktu



Zdroj: Heissler, Valenčík, Wawrosz (2010).

Výchozím předpokladem modelu je pokles cenové hladiny. Zároveň předpokládáme strnulost (rigiditu) nominálních mezd, proto poroste reálná mzda z w/P_0 na w/P_1 , takže roste reálná mzda a cena práce je příliš drahá. To vyvolá pokles zaměstnanosti¹⁶ z L_0 do L_{1D} . Tento pokles v grafu s produkční funkcí (PF), vyvolá pokles celkového produktu z Y_0 na Y_1 . Konstatujme, že strnulost mezd lze v praxi empiricky potvrdit – v řadě firem jsou sjednávány mzdové dohody s platností jednoho či dvou let. Pokud se dramaticky nemění cenová hladina (tj. pokud nedochází k pádivé inflaci nebo hyperinflaci), není důvod ani tlak z nějaké strany kontraktu (ani od zaměstnavatelů ani od zaměstnanců)

¹⁶ Klíčová je poptávka po práci - nabídka by byla při této reálné mzdě vyšší, ale to, kolik bude zaměstnáno lidí, určí firmy svou ochotou je zaměstnat.

mzdy v daném čase měnit. Kombinací výše uvedeného lze odvodit, že v důsledku snížení cenové hladiny z P_0 na P_1 došlo i ke snížení produktu z Y_0 na Y_1 .

2.4.3 Praktické příklady makroekonomických produkčních funkcí

Tato subkapitola¹⁷ přináší přehled vybraných produkčních funkcí, které se nejčastěji objevují v ekonomické teorii. Níže uvedené funkce předpokládají jeden výstup. Vstupy jsou čtenější, obvykle je to práce a kapitál, případně energie a často se pracuje také s kvalitativním faktorem vlivu zdokonalené technologie apod. Tato sbírka obsahuje vesměs statické produkční funkce.

Cobbova–Douglasova produkční funkce: Pravděpodobně nejznámější je Cobbova–Douglasova produkční funkce. Navrhl jí Charles W Cobb v roce 1928 k popisu vztahu mezi výstupem výroby a vstupem práce a kapitálu pro časovou řadu 1889–1922, kterou Douglas sestavil (Mishra, 2010). Standardní tvar funkce je:

$$Y = A * K^{\alpha} * L^{\beta}, \quad (15)$$

kde Y je celková produkce (hrubý domácí produkt), K a L jsou vstupy kapitálu a práce, α a β jsou intenzity faktorů vyjadřující vliv jednotlivých faktorů na celkovou produkci. Parametr (A) reprezentuje vliv technologie a působí jako multiplikátor vstupů obou klasických exogenních faktorů. Pro parametry platí tyto předpoklady, či definiční obory $A > 0$, $0 < \alpha < 1$ a $0 < \beta < 1$ (Ševela, 2012). Součtem faktorových intenzit (vah faktorů) získáme výnosy z rozsahu. Při $\alpha + \beta = 1$ jsou výnosy z rozsahu konstantní, pokud je součet $\alpha + \beta > 1$ tak jsou rostoucí a pokud $\alpha + \beta < 1$ pak jsou klesající (Ševela, 2012). Pokud je Cobbova-Douglasova funkce používána při konstantních výnosech z rozsahu, lze ji zapsat ve tvaru:

$$Y = A * K^{\alpha} * L^{1-\alpha}, \quad (16)$$

přičemž parametry α a $1 - \alpha$ lze interpretovat (Holman, 2010) jako podíl kapitálových důchodů na HDP (α) a podíl pracovních důchodů na HDP ($1 - \alpha$). V dalším textu budou rostoucí výnosy z rozsahu označovány také jako konkávní produkční funkce nebo také nad proporcionální. Klesající výnosy z rozsahu budou označovány rovněž jako konvexní produkční funkce nebo také pod proporcionální. V subkapitole 13.3 se bude pracovat s polynomickými funkcemi vyšších řádů, které mají část s rostoucími výnosy z rozsahu a část s klesajícími výnosy z rozsahu. Dynamické pojetí této produkční funkce umožňuje modelování jak extenzivního, tak intenzivního vývoje. Na součin¹⁸ $K^{\alpha} \cdot L^{(1-\alpha)}$ lze pohlížet jako na váženou geometrickou agregaci faktorů práce a kapitálu do souhrnného input faktoru (SIF), jehož časové změny jsou indikátorem extenzivního vývoje. Časové změny parametru (A) jsou naopak indikátorem intenzivního vývoje.

CES produkční funkce: jedná se o produkční funkci, od které se požaduje, aby elasticita substituce kapitálu za práci zůstala konstantní. Jendou z produkčních funkcí, která toto splňuje je funkce:

$$Y = \gamma * (\delta * K^{-\rho} + (1 - \delta) * L^{-\rho})^{-\nu/\rho}, \quad (17)$$

¹⁷ Text této subkapitoly vychází z (Koláčková, 2013).

¹⁸ V rámci tohoto součinu lze úspěšně řešit problematiku modelování substituce obou faktorů, např. substituce práce kapitálu. Různé kombinace L a K mohou dávat souhrnný input faktor (SIF).

kde pro její parametry platí $\gamma > 0$; $0 < \delta < 1$; $\rho \geq -1$; $\nu > 0$. První parametr je účinnost, druhý parametr je distribuce, který vyjadřuje podíl práce a kapitálu na výstupu, třetí je parametr substituce a čtvrtý je parametr výnosů z rozsahu.

Liuova a Hildebrandova produkční funkce: Liu a Hildebrand formulovali variabilní elasticitu substituce, z čehož vznikla produkční funkce:

$$Y = A * ((1 - \delta) * K^n + \delta * K^{nm} * L^{(1-m)*n})^{1/n}, \quad (18)$$

kde A , δ , m , n jsou parametry. Elasticita substituce je pro tuto funkci:

$$e = 1/(1 - n) + n * \frac{m}{S_k}, \quad (19)$$

kde S_k je podíl kapitálu. Pro tuto funkci platí stejná úvaha o využití její dynamické podoby pro měření intenzity vývoje, o existenci agregátní funkce dílčích faktorů a modelování substituce práce a kapitálu.

Translogaritmická produkční funkce: tato produkční funkce dovoluje variabilní elasticitu produkce. Pro n vstupů (x_i) ji lze zapsat jako:

$$\ln Y = a_0 + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j} * \ln x_i * \ln x_j, \quad (20)$$

kde a_0 , $b_{i,j}$ jsou parametry.

LINEX produkční funkce: tato produkční funkce je založena na fyzice a technologii stejně jako na ekonomických ohledech. Obvykle je vyjádřena ve tvaru:

$$Y = A * E * \exp(a_0 * (2 - \frac{L+E}{K}) + a_0 * c_0 * (\frac{L}{E} - 1)) \quad (21)$$

Výstup je v této funkci lineárně závislý na energii (E) a je exponenciálně závislý na kvocientu kapitálu, práce a energie. Parametry a_0 a c_0 zachycují strukturální a kreativní změny.

Leontiefova produkční funkce: tato produkční funkce je funkce s fixními proporcemi a vyznačuje se pevným vstupním koeficientem. Předpokládá striktní komplementaritu a nulovou nahraditelnost, kdy pro každou komoditu existuje pouze jedna kombinace výrobního postupu. Izokvanta tohoto typu produkční funkce má tvar dvou polopřímek se společným počátkem a v pravém úhlu vůči sobě. Polopřímky jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Leontiefova produkční funkce vyžaduje určité minimální množství faktorů a lze ji zapsat ve tvaru:

$$Y = \min\left(\frac{x}{a}; \frac{y}{b}\right). \quad (22)$$

Z rovnice vyplývá, že výstup je roven minimu poměrů $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, přičemž, pokud jsou tyto poměry rovny, potom jsou vstupy plně využívány.

Satoova produkční funkce: tato funkce je nazvána podle svého tvůrce (Ryuzo Sato), který ji definoval (Sato, 1964) jako:

$$Y = (K^2 * L^2)/(a * K^3 + b * L^3), \quad (23)$$

kde a , b jsou kladné parametry. Na rozdíl od výše uvedených funkcí má Satoova funkce konstantní výnosy z rozsahu a mezní produkty jednotlivých vstupů mohou (pokud je ten druhý konstantní) růst a poté klesat až pod nulu (Makin a Strong 2013).

Thünenova produkční funkce: tuto funkci uvádíme pro zajímavost, protože Johann von Thünen byl první ekonom, který implicitně definoval exponenciální produkční funkci v následujícím tvaru:

$$Y = A * \prod_{i=1}^3 (1 - e^{-a_i * F_i}). \quad (24)$$

Von Thünen tuto funkci zformuloval pro zemědělskou produkci a Y zde reprezentuje výstup zemědělstvím vstupy (F_i) jsou výrobní faktory práce, kapitál a hnojiva. Rovněž pro tuto funkci platí stejná úvaha o využití její dynamické podoby pro měření intenzity vývoje, o multiplikativní agregátní funkci třech dílčích faktorů a o modelování substituce práce, kapitálu a množství hnojiv.

Pro úplnost dodejme, že vedle výše zmíněných funkcí jednoho výstupu se ekonomie věnuje též produkčním funkcím s více výstupy. Nejvíce se tímto problémem zabývali ekonomové, kteří se zajímali o zemědělskou produkci a zemědělskou ekonomiku. Ekonomické studie se později zabývaly i produkčními funkcemi s rozdělením času na práci a volný čas. Dnes jsou tyto funkce aplikovány také na environmentální ekonomiku. Detaily však leží mimo rozsah tohoto textu.

3 Vymezení a typologie produkčních funkcí

3.1 Podstata problému a jeho univerzálnost

Jestliže ekonomie je především optimalizační věda, pak produkční funkce je matematické zobrazení klíčové ekonomické transformace, kterou je přeměna výrobních faktorů na produkt. V ještě obecnější podobě jde v kybernetickém pojetí o proměnu vstupů na odpovídající výstupy. Někdy se setkáváme s námitkou, že ekonomie je nejen výrobní proces, nýbrž především marketing, obchod, zahraniční směna, kapitálový trh apod. To je jistě pravda, avšak produkční funkce v sobě může obsahovat i všechny tyto další procesy ekonomické povahy, záleží jen na tom, co zahrneme do vymezení vstupů a co do výstupů.

Produkční funkce byly vždy základním ekonomickým tématem, protože vyjadřují klíčový problém ekonomie, kterým je optimalizace transformace všech použitých výrobních faktorů na všechny produkty a služby, které slouží k uspokojování potřeb. Ovšem ne každý, kdo se zabývá tímto transformačním procesem, si přitom uvědomuje, že právě to vyjadřují produkční funkce, a to zejména tehdy, pokud nejde o exaktní výpočty. Tato monografie se zabývá **zobecnělou** produkční funkcí s tím, že ji odvozuje z konkrétních, v praxi používaných produkčních funkcí jak na makro, tak na mikro úrovni, v podnikové praxi a dokonce i mimo samotnou ekonomii. To je dáno tím, že pracujeme s obecným problémem systému, který má své vstupy, které transformujeme na nějaké výstupy. Z toho pak plyne velmi univerzální použití dosažených výsledků.

Ústředním tématem celé ekonomie je optimalizace různých ekonomických systémů, jejichž chování lze analyzovat případně prognostikovat například pomocí časově proměnných vstupů a výstupů. Exaktním vyjádřením takto proměnlivé reality je dynamická produkční funkce nebo dynamizované produkční funkce, tj. taková, která vyjadřuje změny reality změnami statické produkční funkce. Její podstatou je matematické vyjádření transformačního procesu vstupů daného systému na jeho výstupy na různých úrovních ekonomické reality. Jde o to nalézt takové matematické funkce a jejich parametry, které co nejlépe odpovídají realitě včetně jejího vývoje, to je odpovídající dynamiky. Protože produkce je nezbytnou, i když nikoliv postačující podmínkou, uspokojování lidských potřeb, věnuje ekonomická teorie problematice produkční funkce jak explicitně, tak implicitně značnou pozornost. Přesto, některé otázky nejsou jednoznačně zodpovězeny a objevují se další. Jednou z nich bylo ještě donedávna, jak vyjádřit souhrnný vliv změn intenzivních anebo změn extenzivních faktorů na změnu výstupu. Tato úloha úzce souvisí např. s interpretací váhy v rovnici růstového účetnictví, která vlastně představuje dynamickou produkční funkci. Řešením této úlohy se zabývala monografie *Analýza vlivu intenzivních faktorů vývoje ekonomiky* (Mihola, 2017).

Tuto úlohu lze řešit pouze na základě existence konkrétní produkční funkce. Toto řešení je velmi závislé na typu agregace výrobních faktorů, zejména zda jde o agregaci aditivní nebo multiplikatívni. Současně řešení této úlohy přináší základní podněty pro návrh typologie produkčních funkcí. K řešení úlohy zjišťování kvality vývoje lze přistoupit, také jako ke kybernetickému problému, tj. na daný systém se pohlíží, jako

na černou schránku, která má své postupně se měnící výstupy a vstupy. Souhrnnou kvalitu vývoje pak lze zjistit analýzou časových změn těchto vstupů a výstupů. Velkou výhodou je, že přitom nemusíme znát podrobnou strukturu zkoumaného systému. Vstupními veličinami jsou časové řady vstupů a výstupů. Časové řady mají n položek, které budou označovány indexy $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Jestliže výstupy označíme y_j a vstupy¹⁹ x_j , pak lze definovat podíl vstupů a výstupů v j -tém okamžiku jako efektivnost²⁰ (podle konkrétní interpretace lze použít též pojmy produktivita, účinnost vstupu nebo také cena, rychlost, zrychlení, hustota apod.):

$$Ef_j = y_j/x_j \quad (25)$$

Mezi autory definující efektivnost jako vztah (podíl) výstupů a vstupů²¹ nebo jako množství výstupů na jednotku vstupů, patří např.

- (Samuelson, 2000, s. 124) „Efektivnosť znamená najúčinnější využitie zdrojov spoločnosti pri uspokojovaní prání a potrieb ľudí, teda ekonomika produkuje efektívne vtedy, keď nemôže zvýšiť blahobyt jedného, bez toho, aby poškodila niekoho iného.“
- (Klacek, 2006, s. 291) „Obecně můžeme vymeziť souhrnnou produktivitu výrobních faktorů $SP(t)$, jako poměr mezi výstupem výrobního procesu, tj. produktem $Q(t)$ a souhrnem vstupů výrobních faktorů $N(t)$ do výrobního procesu. $SP(t) = (Q(t))/(N(t))$ “
- (Žák, 2002, s. 614) „Produktivita vyjadřuje míru využití zdrojů (výstupů) při tvorbě konečného produktu (výstupu). Obecně je vyjádřena podílem $P = \text{výstup}/\text{vstup}$.“

Takto definovaná efektivnost vyjadřuje, kolik jednotek výstupů získáme v okamžiku j z jedné jednotky vstupů. Převrácená hodnota má interpretaci náročnosti a udává kolik vstupů je potřebných na vyprodukování jedné jednotky výstupů. Skutečnost, že reálné systémy mají obvykle více různých vstupů i více různých výstupů bude prozatím vyřešen předpokladem existence nějaké vhodné agregace²² všech dílčích vstupů do jedné souhrnné veličiny vstupů, případně všech dílčích výstupů do jednoho souhrnného či reprezentativního výstupu. V realitě jsou i takové případy, že vstupy daného systému tvoří jediný kvantifikovatelný vstup a výstupy jsou rovněž jednorozměrné a snadno kvantifikovatelné jednou v čase proměnlivou veličinou.

Vstupy a výstupy jsou zde definovány velmi obecně. Jedinou, obvykle snadno splnitelnou podmínkou je, aby byl smysluplný i poměr výstupů a vstupů, tj. kolik jednotek výstupů připadá na jednu jednotku vstupů. S toho plyne, že je velmi výhodné, pokud jsou výstupy a vstupy sofistikovaně měřitelné veličiny. Příklady takových trojic v pořadí výstupy, vstupy a jejich podíl jsou např. tržby, prodané množství a cena;

¹⁹ Počet členů časové řady n je přirozené číslo. Vstupy jsou kladná reálná čísla tj. $x > 0$ a výstupy jsou nezáporná reálná čísla, tj. $y \geq 0$. Případy nulových vstupů x , které by generovaly nulové výstupy, nebudou uvažovány. Bude ale počítáno s případem, kdy budou nenulové vstupy zcela zmařeny (nebo nebudou dostačovat), takže nevyprodukují žádné výstupy.

²⁰ Definičním oborem efektivnosti jsou tedy opět nezáporná reálná čísla $Ef \geq 0$.

²¹ V dnešním pojetí jde o TFP total factor productivity, viz např. (Comin, 2010, s. 260–263).

²² To je často dosti reálné, např. v podniku jsou souhrnným výstupem celkové příjmy a celkové vstupy představují celkové náklady.

celkový příjem, celkové náklady a efektivnost; hrubý domácí produkt, souhrnný input faktor a souhrnná produktivita faktorů; dráha, čas a rychlost apod.

Pokud se zabýváme jednotlivými členy časové řady a jejich vztahy řešíme tzv. statickou úlohu. Dynamická úloha²³ je definována výhradně dynamickými charakteristikami absolutního přírůstku, tempa růstu nebo koeficientu změny a jejich vztahy. Dynamické charakteristiky jsou definovány²⁴ na příkladu vstupů x (obdobné vztahy platí pro výstupy y , efektivnost Ef apod.) :

$$\text{- absolutní přírůstek} \quad \Delta(x) = x_j - x_{j-1} \quad (26)$$

$$\text{- tempo růstu} \quad G(x) = \Delta(x)/x_{j-1} = I(x) + 1 \quad (27)$$

$$\text{- koeficient změny} \quad I(x) = x_j/x_{j-1} = G(x) - 1 \quad (28)$$

Z výrazů (25), (27) a (28) lze odvodit vztahy (29) a (30) mezi uvedeným stejnorodými dynamickými charakteristikami. Tempo růstu výstupů lze vyjádřit jako funkci tempa růstu vstupů a efektivnosti:

$$G(y) = G(x) + G(Ef) + G(x) \cdot G(Ef) \quad (29)$$

Analogicky pro indexy platí:

$$I(y) = I(x) \cdot I(Ef) \quad (30)$$

Vztah (29) má mnoho společného s rovnicí růstového účetnictví, které využívá pro zjištění podílů vlivu právě aditivní část výrazu (29) s tím, že poslední multiplikační člen $G(x) \cdot G(Ef)$ se zanedbává. To je přípustné jen pokud jde o malá tempa růstu, což je podrobně rozebráno v (Mihola, 2007b, s. 448–450) nebo v (Hájek, 2009, s. 742–743). Vzhledem k tomu, že přesné²⁵ řešení úlohy odvození vztahů pro vyjádření podílů vlivu vývoje faktoru kvantitativního a kvalitativního se neobejde bez nalezení nějaké výchozí aditivní vazby, vyjdeme ze zlogaritmovaného výrazu (30), protože nebudeme muset nic zanedbávat a proto nebudeme omezeni na malé relativní přírůstky:

$$\ln I(y) = \ln I(x) + \ln I(Ef) \quad (31)$$

Odvození dynamických parametrů vyjádření podílů vlivu vývoje faktoru kvantitativního a kvalitativního na vývoj výstupu si vyžaduje nalezení vhodného indikátoru působení všech intenzivních faktorů ve svém souhrnu. Vzhledem k tomu, že intenzivních výrobních faktorů je obecně velmi mnoho připadá v úvahu, buď nějaká agregace dílčích intenzivních vlivů, nebo nějaké souhrnné vyjádření pomocí vhodné funkce již definovaných ukazatelů.

²³ Více o statické a dynamické úloze v kapitole 5.

²⁴ Jestliže definičními obory vstupů a výstupů jsou podle poznámky 18 $x \in (0, \infty)$; $y \in (0, \infty)$, pak definičními obory dynamických charakteristik jsou pro indexy $I(x) \in (0, \infty)$; $I(y) \in (0, \infty)$ pro tempa růstu; $G(x) \in (-1, \infty)$; $G(y) \in (-1, \infty)$.

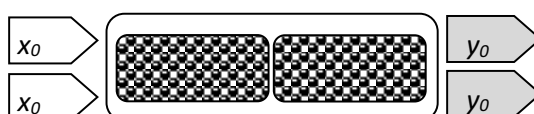
²⁵ Přesné znamená, že nebudeme vycházet z jakéhosi přibližného výrazu, platného jen pro např. malá tempa růstu apod.

Kybernetické zobrazení nějaké obecné černé schránky platné pro výchozí rok časových řad vstupů i výstupů je označené indexem (o) a je možné znázornit je tímto jednoduchým schématem:



Pokud bude potřeba například zdvojnásobit výstupy systému, lze toho dosáhnout jedním ze dvou následujících specifických způsobů. Buď se zdvojnásobí celý systém, nebo se zdvojnásobí jen výkon stávajícího zařízení výhradně pomocí intenzivních faktorů vývoje.

V prvním **čistě extenzivním** případě se zdvojnásobí jak veškeré vstupy, tak veškeré výstupy, tak jak to znázorňuje upravené schéma, zvyšující kapacitu systému o 100 %.



V případě čistě extenzivního vývoje (označeného indexem e) se nebude měnit efektivnost, tj. efektivnost extenzivní změny se rovná efektivnosti systému ve výchozím stavu neboť:

$$Ef_e = 2.y_o/2.x_o = Ef_o \quad (32)$$

Ve druhém **čistě intenzivním** případě se vychází ze stejných vstupů jako ve výchozí situaci (index o). Dvojnásobných výstupů se dosahuje výhradně pomocí intenzivních faktorů, tj. zkvalitněním procesu přeměny stejných vstupů na dvojnásobné výstupy.



Efektivnost vzroste v případě čistě intenzivního vývoje na dvojnásobek:

$$Ef_i = 2.y_o/x_o = 2.Ef_o \quad (33)$$

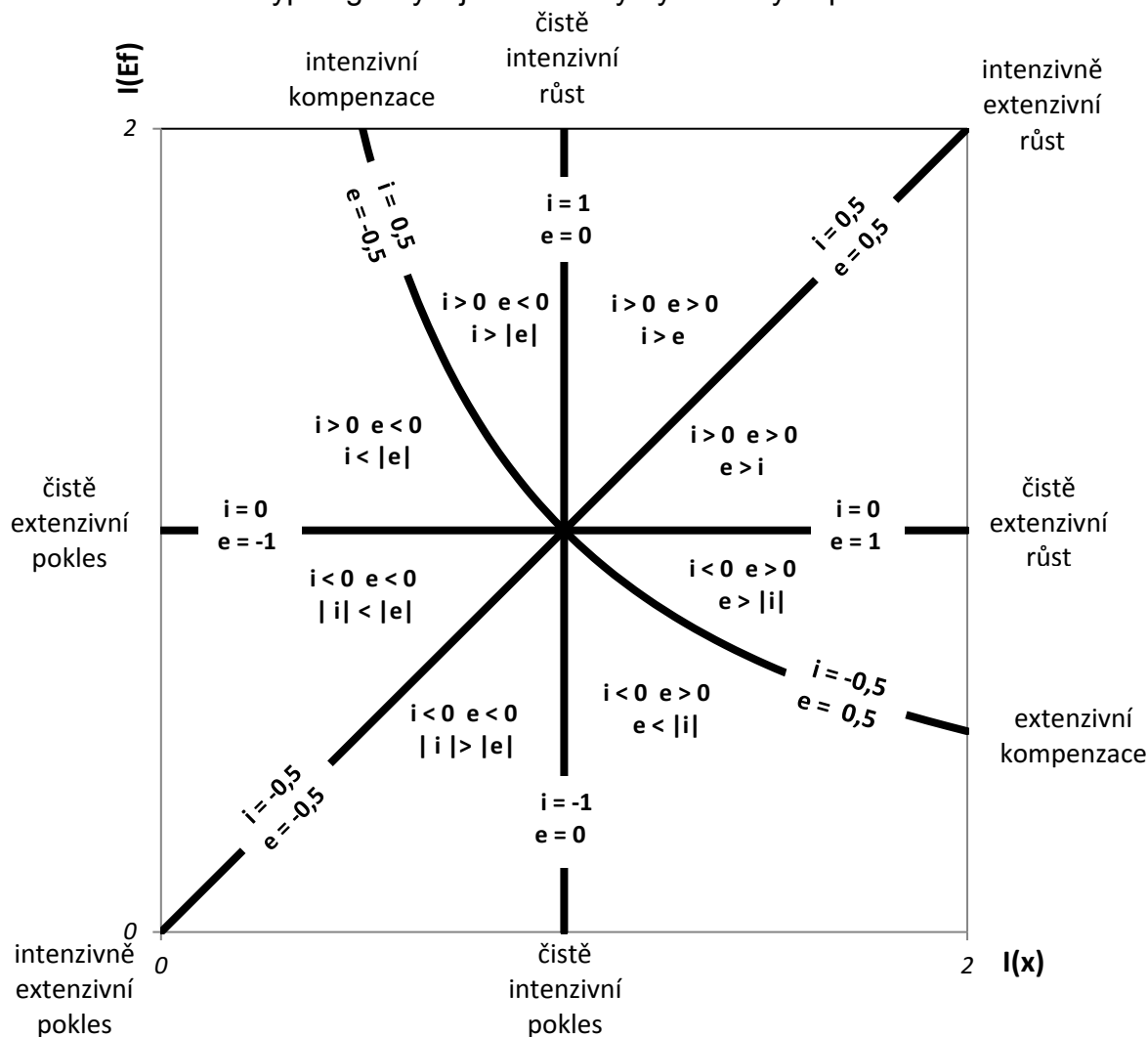
Uvedená skutečnost je klíčovým důvodem, proč je změna efektivnosti vhodným indikátorem intenzity ekonomického vývoje. Efektivnost se při čistě extenzivním vývoji nemění, zatímco při čistě intenzivním rostla stejně jako výstupy. Toho lze využít při rozlišování míry intenzity vývoje ekonomiky a obecně při odvození typologie²⁶ vývoje výstupů y z hlediska působení dvou faktorů, tj. vlivu vývoje extenzivních faktorů představovaných vývojem vstupů x a vlivu vývoje intenzivních faktorů představovaných vývojem efektivnosti Ef.

Předpokladem pro odvození výrazu pro přesné měření podílu vlivu intenzivních faktorů je, aby hodnoty těchto parametrů nabývaly dobře interpretovatelných hodnot pro všechny základní vývoje, tj. např. pro čistě intenzivní vývoj, čistě extenzivní vývoj a další. Klasifikace základních druhů vývoje je na obrázku 5. Na ose x je vyneseno index vstupů I(x). (Pokud odečteme od každé hodnoty stupnice 1 a vynásobíme jí 100,

²⁶ Podrobně je tato typologie odvozena v (Mihola, 2007a, 116–122) a ještě podrobněji i ve vztahu k historickému vývoji tohoto problému v (Mihola, 2016). Touto typologií se budeme pro různé specifické případy v této monografii ještě zabývat.

získáme stupnici pro tempo růstu $G(x)$ v %.) Na ose y je vynesena index efektivity $I(Ef)$ nebo tempo růstu efektivity $G(Ef)$ v %. Dynamický parametr (i) představuje intenzitu, která vyjadřuje podíl vlivu intenzivních faktorů na vývoji výstupu, zatímco (e) představuje extenzitu, která vyjadřuje podíl vlivu extenzivních faktorů na vývoji výstupu.

Obrázek 5: Typologie vývoju a hodnoty dynamických parametrů



Zdroj: autoři

Na tomto obrázku je zobrazena rovněž hyperbola procházející počátkem souřadné soustavy představující stagnaci výstupů, pro niž platí $I(y) = 1$ nebo také $G(y) = 0$. Rovnici této stagnační hyperboly lze odvodit ze vztahu (30) po dosazení $I(y) = 1$:

$$I(Ef) = 1/I(x) \quad (34)$$

Současně je na tomto grafu zakreslena osa I. a III. kvadrantu, což je přímka vývoju se shodným působením obou sledovaných faktorů tj.

$$I(x) = I(Ef) \quad (35)$$

V tomto obrázku lze zobrazit všechny základní i smíšené druhy vývoju ve všech vzájemných souvislostech. Počátek souřadnicové soustavy těchto diagramů

představuje stagnaci, kde platí (výraz (36) využívá tempa růstu, zatímco výraz (37) indexy růstu):

$$G(y) = G(Ef) = G(x) = 0 \quad (36)$$

$$I(y) = I(Ef) = I(x) = 1 \quad (37)$$

Dosažení přesného bodu stagnace je v praxi nepravděpodobné. Pravděpodobnější je dosažení některého bodu v blízkosti počátku souřadnic, kde se velmi citlivě mění proporce dynamických charakteristik. Z toho důvodu je měření intenzity a extenzity pro velmi malé vývoje, často zatížené nějakou chybou měření, je málo validní. To samo sebou nevádí, neboť intenzita a extenzita vývoje je spojována z významnou dynamikou alespoň některých uvažovaných veličin.

Obrázek 5 obsahuje jak názvy všech čistých vývojů, tak návrh hodnot, kterých by dynamické parametry intenzity a extenzity měly logicky nabývat. Oblast růstu vstupů je vpravo od osy y . Oblast růstu efektivnosti je od osy x nahoru a konečně oblast růstu výstupů je vpravo nahoru od stagnační hyperboly. Například při čistě intenzivním vývoji je logické, aby parametr intenzity nabýval velikosti 1, tj. ve vyjádření v % právě 100 %, zatímco parametr extenzity by měl analogicky při čistě intenzivním vývoji nabývat hodnoty 0 či 0 %. Na hyperbole stagnace výstupů jsou vývoje představující úplnou kompenzaci působení obou uvažovaných faktorů. Na horní větvi je růst efektivnosti Ef kompenzován poklesem vstupů x , pročež je logické, aby dynamické parametry nabývaly hodnot $i = 0,5$ a $e = -0,5$ nebo $i = 50 \%$ a $e = -50 \%$. Na dolní větvi je pokles efektivnosti Ef kompenzován růstem vstupů x , pročež je logické, aby dynamické parametry nabývaly hodnot $i = -0,5$ a $e = 0,5$ nebo $i = -50 \%$ a $e = 50 \%$ apod.

Obrázek 5 názorně ukazuje rovněž, jaké vztahy platí mezi dynamickými parametry intenzity a extenzity v tzv. smíšených vývoji. Například růst výstupů při částečné efektivní kompenzaci, kde výstupy rostou, neboť efektivnost roste rychleji, než klesají zdroje, takže současně platí $i > 0$; $e < 0$; $i > |e|$.

Nyní je již možno odvodit dynamické parametry intenzity a extenzity s pomocí výrazu (31), které je detailně provedeno v (Mihola, 2007a, s. 122 až 124). Dále uvedené dynamické parametry intenzity a extenzity vyjadřují všechny případy poklesů, růstu, či stagnace produktu při souhlasném i kompenzačním působení intenzivních a extenzivních faktorů růstu a jsou zkonstruovány tak, aby hodnoty dynamických parametrů nabývaly odpovídající hodnoty z obrázku 5. Pro vyjádření podílu vlivu intenzivních faktorů na vývoj výstupu byly odvozeny tyto dynamické parametry intenzity i (38) a extenzity e (39).

$$i = \frac{\ln I(Ef)}{|\ln I(Ef)| + |\ln I(x)|} \quad (38)$$

$$e = \frac{\ln I(x)}{|\ln I(Ef)| + |\ln I(x)|} \quad (39)$$

Odvozené parametry mají široké a univerzální použití jak ve statické, tak zejména v dynamické úloze, a to na různých hierarchických úrovních ekonomiky i v přírodních vědách jako je fyzika, chemie, astronomie apod. Jejich další aplikace a modifikace jak

na národohospodářské, tak na podnikové úrovni odpovídají různým definicím produkčních funkcí.

Univerzálnost této metody měření extenzity a intenzity spočívá v nemnohých jednoduchých předpokladech použití, které vychází z velmi obecné formulace úlohy. Stačí, že je k dispozici nějaký systém, který má proměnlivé vstupy a výstupy přičemž podíl těchto dvou veličin je smysluplná veličina a pro veličiny (x) a (y) platí definiční obory uvedené v poznámce 18. Ještě obecněji lze říci, že tato metodika je použitelná všude tam, kde nalezneme nějaký součin kvantitativní a kvalitativní veličiny.

3.2 Základní charakteristika

Jak již bylo konstatováno v kapitole 2.1, produkční funkce je vztah mezi maximálním množstvím produkce, které může být vyrobeno a množstvím výrobních faktorů, které jsou potřebné k výrobě této produkce.²⁷ Body nad produkční funkcí jsou danou technologií nedosažitelné, zatímco body pod produkční funkcí jsou technicky proveditelné na stanovené úrovni využití vstupu. Produkce je zde chápána v intencích národního účetnictví jako společensky organizovaná činnost spočívající v tvorbě zboží a služeb, které jsou směňovány na trhu, nebo jsou spotřebovávány. Vstupy představují různé kombinace výrobních faktorů, jako jsou půda práce, kapitál, suroviny, energie, technologie, informace, inovace apod.

Toto národohospodářské vymezení lze úspěšně převést na úroveň podniku nebo jiného ekonomického systému. Pro potřeby obecné typologie produkčních funkcí je účelné zobecnit produkční funkci jako příčinný vztah vyjadřující jaké maximální agregované množství výstupů (Y) mohou vyprodukovat z daného množství vstupů (X) prostřednictvím dané technologie, či způsobu tvorby produkce.

$$Y = F(X) \quad (40)$$

Funkce $F(X)$ vyjadřuje konkrétní **statickou** produkční funkci. Základní typy těchto funkcí jsou na obrázcích 1a) až 1c) a 2 nakresleny spolu se svou derivací²⁸ (Y') podle (X) a s hodnotou efektivnosti, která vyjadřuje podíl²⁹ jednotek výstupu na jednotku vstupů.

$$Ef = \frac{Y}{X} \quad (41)$$

Převrácená hodnota je náročnost, udávající kolik jednotek vstupů je potřeba na jednotku výstupů. Skutečnost, že reálné systémy mají obvykle více vstupů i výstupů je řešitelná agregací vstupů a agregací výstupů, např. na úrovni firmy jsou takovým agregátem TC celkové náklady a TR celkové příjmy.

Následující analýza statických produkčních funkcí bude vycházet z obecného vymezení vstupů a výstupů ekonomických procesů, avšak bude platná pro jakoukoliv konkretizaci vstupů a výstupů při dobré interpretaci jejich podílu ve smyslu vztahu (41).

²⁷ Definice z *Velké ekonomické encyklopedie* (Žák a kol. 2002, s. 6013).

²⁸ Derivace y' v podstatě odpovídá meznímu produktu MQ' , s kterým se pracuje v mikroekonomii.

²⁹ Je to analogický vztah k výrazu (25).

Příklady konkretizací, vstupů a výstupů uvedených v tabulce 1 a zavedení jejich proměnlivosti v čase, jsou cestou k vytvoření typologie produkčních funkcí. Naše analýza a typologie produkčních funkcí je provedena pro obecný ekonomický i jiný systém, který má své výstupy (Y) a vstupy (X) viz (tučně řádek 1). Počet jednotek výstupů na jednotku vstupů bude označen jako efektivnost (Ef). Všechny další řádky tabulky 1 představují příklady možných interpretací vstupů a výstupů na úrovni mikroekonomické³⁰ (řádek 2 až 4); na úrovni makroekonomické (řádek 5); z teorie her (řádek 6) nebo z fyziky (řádek 7 a 8).

Svým způsobem je překvapující jaká široká plejáda vztahů má v podstatě povahu produkční funkce. Oproti dosavadnímu zúženému pojetí produkční funkce zde vystupují i některé identity jako například v řádku 4.

Tabulka 1: Konkretizace vstupů a výstupů produkční funkce

| | vstupy | | poměr (podíl) | | výstupy | |
|---|----------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | souhrn vstupů | X | efektivnost | $Ef = Y/X$ | souhrn výstupů | Y |
| 2 | množství výrobních faktorů | Q | efektivnost | $Ef = Q'/Q$ | množství produkce | Q' |
| 3 | celkové náklady | TC | efektivnost | $Ef = TR/TC$ | celkové příjmy | TR |
| 4 | množství prodané produkce | Q' | cena produktu | $P = TR/Q'$ | celkové tržby | TR |
| 5 | souhrnný input faktor | TIF | souhrnná produktivita faktorů | $TFP = HDP/TIF$ | hrubý domácí produkt | HDP |
| 6 | vklad | Vk | zhodnocení | $Ef = Vč/Vk$ | vyhraná částka | $Vč$ |
| 7 | čas | t | rychlost | $V = s/t$ | ujetá dráha | s |
| 8 | čas | t | zrychlení | $a = v/t$ | rychlost | v |

Zdroj: vlastní zpracování

3.3 Produkční funkce ve statickém tvaru

Produkční funkce ve statickém tvaru vyjadřuje, kolik výstupů, tj. souhrnné produkce (Y) lze při dané technologii (organizaci, vybavení apod.) maximálně vyprodukovat z použitých vstupů, zdrojů. Na obrázku (5a), (5b), (5c) jsou statické polynomické funkce I. (lineární), II. (kvadratická) a III. stupně (kubická). Všechny 3 produkční funkce

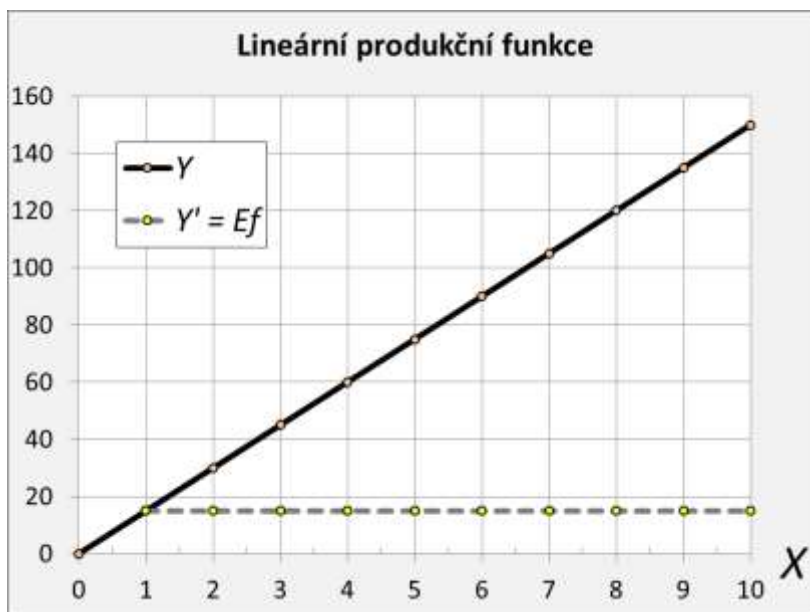
³⁰ Viz např. (Synek, Kyslingerová, 2011).

jsou doplněny rovněž svými derivacemi (Y') čárkovaně a průběhem efektivnosti (Ef) tečkovaně.

Obrázek (5a) představuje lineární produkční funkci, která prochází počátkem souřadnic a má konstantní sklon a tudíž i derivaci stejně jako efektivnost. Přesto, že jde o statickou funkci, má současně interpretaci jako dynamická funkce čistě extenzivního rozvoje, který se vyznačuje tím, že dochází k pouhé proporcionalní změně rozsahu produkce. Nedochází k žádnému vylepšení, takže se nemění efektivnost, která je indikátorem intenzity.

Obrázek (5b) vyjadřuje kvadratickou produkční funkci, která rovněž prochází počátkem souřadnic, avšak má parabolický průběh. Přírůstky této funkce se postupně lineárně zmenšují, až nabydou hodnoty nula ve vrcholu, kde je největší produkce (čtvercový bod). Derivace je ve vrcholu nulová, neboť tečna je rovnoběžná s osou x . Následující pokles při dalším nárůstu vstupů lze interpretovat jako přesycení daným zdrojem³¹. Lineárně klesá nejen derivace, nýbrž i efektivnost, která je nulová až v bodě, kde produkční funkce klesne na nulu. Parabolická produkční funkce vyjadřuje zákon klesajících mezních výnosů, při nehomogenních výrobních faktorech vyjadřuje to, že nejdříve budeme využívat kvalitnější výrobní faktory a až postupně ty horší, které již přináší menší přírůstek výstupů (produkce). Avšak i při homogenních výrobních faktorech, přináší největší efekt první jednotky výrobního faktoru.

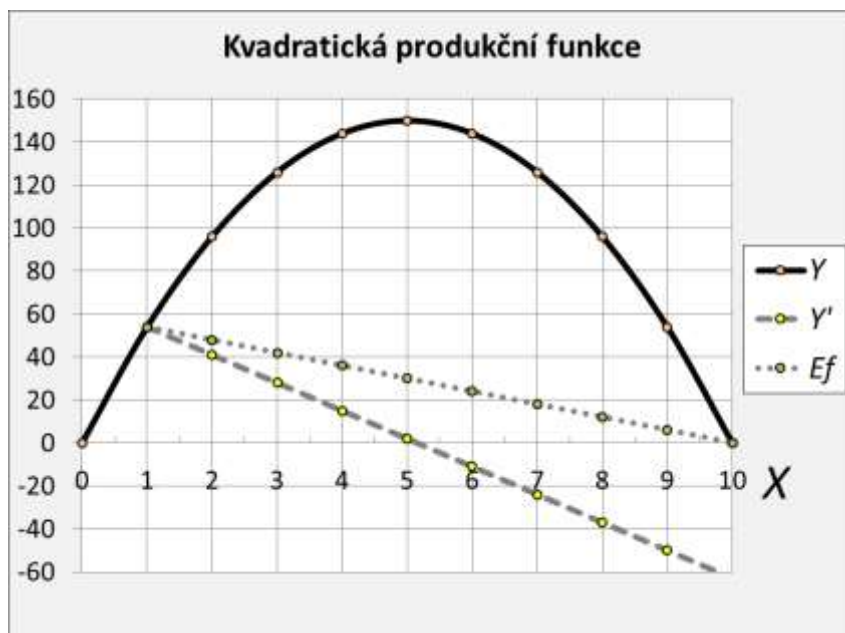
Obrázek 5a: Základní statické polynommické produkční funkce



Zdroj: vlastní zpracování

³¹ Např. příliš mnoho vody pro závlahu rostlin způsobí úbytek produkce a příliš mnoho vody nedovolí ani jejich vzrůst.

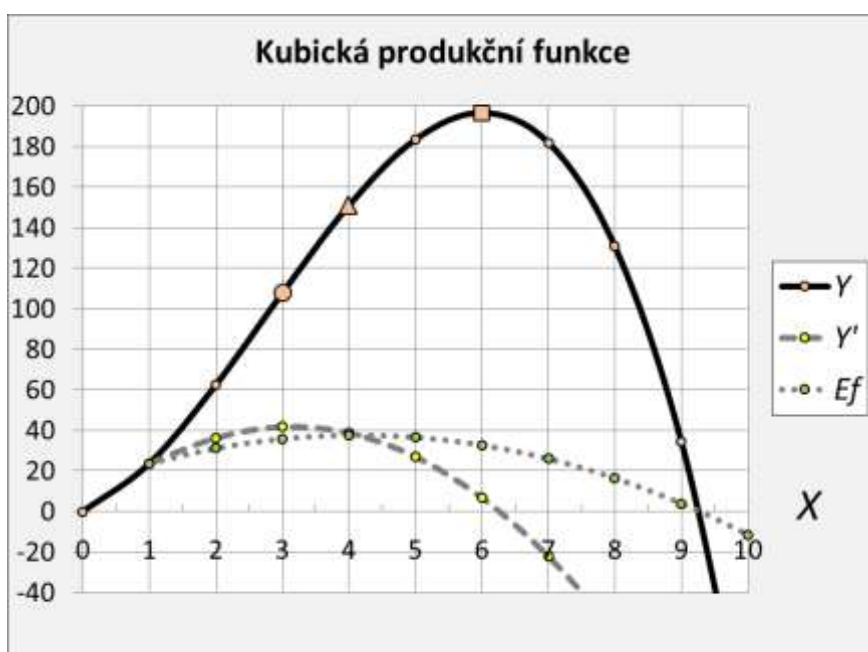
Obrázek 5b: Základní statické polynomické produkční funkce



Zdroj: vlastní zpracování

Kvadratická produkční funkce vyjadřuje také averzi k riziku podnikatelů nebo i hráčů.

Obrázek 5c: Základní statické polynomické produkční funkce



Zdroj: vlastní zpracování

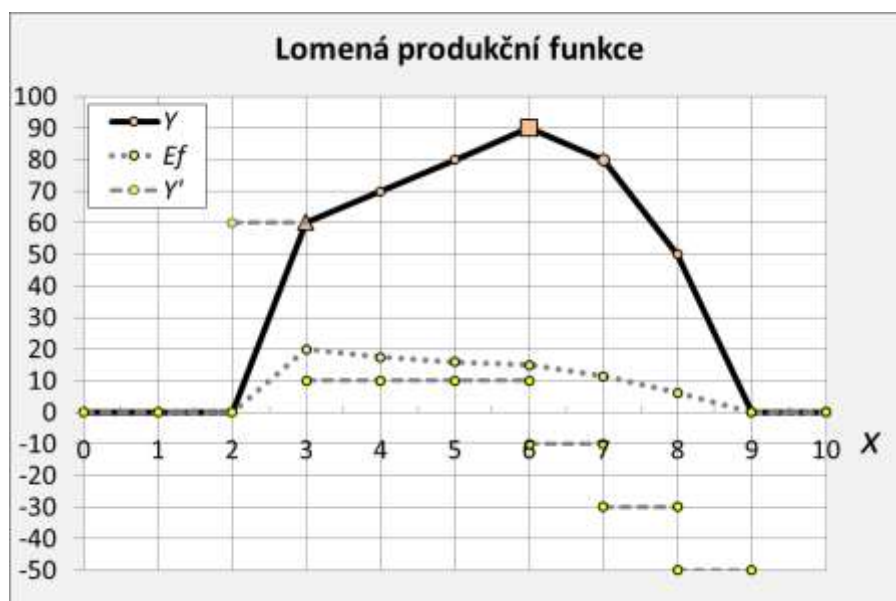
Na obrázku (5c) je kubická produkční funkce, která rovněž prochází počátkem souřadnic, avšak má na rozdíl od parabolické části též úsek, na které je přírůstek stále rychlejší (také se nazývá konvexní, či nadproporcionální). Tato část produkční funkce představuje rostoucí efektivnost z rozsahu, tj. úsek, na kterém je přidání výrobních faktorů doprovázeno synergickým efektem. Předělem mezi částí rostoucí stále rychleji a stále pomaleji (tj. mezi konkávní a konvexní částí) je inflexní bod zobrazený jako

výrazný kruhový bod. Rovněž tato kubická produkční funkce má svůj vrchol (čtvercový bod), kde je největší produkce i následující klesající část. Derivace má parabolický průběh s vrcholem v inflexním bodě a nulou v bodě maxima produkční funkce. Křivka efektivnosti má své maximum v průsečíku s derivací funkce. Trojúhelníkový bod maximální efektivnosti (Ef) je na produkční funkci v místě, kde se křivky dotýká nejstrmější tečna vedená z počátku souřadnic³². Kubická funkce tohoto typu je v jiných souvislostech uvedena také na obrázku 3 v subkapitole 2.3 v rámci rešerše. Velmi podrobně je tento problém analyzován v subkapitole 12.3 na obrázku 55 kvadratická produkční funkce a na obrázku 58 kubická produkční funkce, avšak jsou zde též polynomické funkce vyšších řádů.

Pro vyjádření komplikovanějších produkčních funkcí lze úspěšně použít polynomické funkce vyšších řádů, jak je to provedeno v subkapitole 12.3. Jedním z požadavků na reálný průběh produkční funkce je modelování většího či menšího prohnutí mezi počátkem souřadnic a inflexním bodem nebo mezi počátkem souřadnic a trojúhelníkovým bodem nejvyšší efektivnosti. Právě tohoto efektu lze dosáhnout tím, že použijeme polynomickou funkci, např. čtvrtého nebo pátého řádu. Současně není nutné, aby tato funkce měla členy všech řádů. Polynomické funkce vyšších řádů se tak osvědčily jako velmi univerzálně použitelné pro většinu praktických aplikací.

Uvedená zobrazení jsou vhodná pro jejich popis a pro vymezení významných bodů produkční funkce, avšak zřídka kdy jsou takové hladké křivky k dispozici, neboť jejich proměření je nákladné. Většinou stačí pro praktické výpočty znát jen několik bodů. Proto je na obrázku 6 nakreslena zjednodušená lomená produkční funkce, která v podstatě odpovídá kubické produkční funkci na obrázku (5c). Derivace, tj. sklon tečny je v jednotlivých úsecích konstantní. Efektivnost má opět své maximum v trojúhelníkovém bodě a tato funkce má též čtvercový bod s maximální produkcí.

Obrázek 6: Zjednodušená statická produkční funkce třetího řádu



Zdroj: vlastní zobrazení

³² Rozsáhlou diskusí tohoto problému se zabývá (Sickles a Zelenyuk, 2019).

Pokud bychom konkretizovali obecné tvary produkčních funkcí na obrázcích (5a), (5b), (5c) na podnikovou produkční funkci uvedenou v tabulce 1 na řádce 4, ocitneme se v mikroekonomické teorii firmy. V tomto případě budeme na ose x vynášet množství produkce Q a na ose y budou položky TR , MR , AR a cena p . Lineární nárůst na obrázku (5a) reprezentovaný přímkou představuje vývoj celkových příjmů TR v dokonalé konkurenci, při které jsou si rovny a jsou konstantní průměrné příjmy AR , mezní příjmy MR a cena produkce p , tj. $AR = MR = p$. Kvadratický vývoj na obrázku (5b) reprezentovaný parabolou představuje vývoj celkových příjmů TR v nedokonalé konkurenci, při které jsou si rovny a jsou lineárně klesající průměrné příjmy AR a cena p ($AR = p$), zatímco mezní příjmy MR klesají rovněž lineárně, avšak rychleji takže jsou nulové pro Q pro něž je maximální TR . Rovněž obrázek (5c) lze interpretovat v rámci mikroekonomické teorie firmy. Jde o komplikovanější případ nedokonalé konkurence, kdy cena $p = AR$ nejdřív roste a posléze klesá. Mezní příjem MR má parabolický průběh. Maximální je MR v inflexním bodě křivky TR a nulová hodnota MR je v bodě maximálního TR .

Účelem statické produkční funkce je vybrat vhodný bod, který zabezpečí momentální optimální využití stávající technologie. Můžeme zvolit bod maximální produkce, kde vyprodukujeme nejvíce, avšak nikoliv s největší efektivností. Bod s maximální efektivností zajistí produkci s nejlepším využitím vstupů na jednotku výstupů, což je jistě žádoucí stav jak z hlediska firmy, tak z hlediska společenského. V bodě maximální efektivnosti je totiž největší podíl Y/X , tj. z jedné jednotky vstupů získáme nejvíce jednotek výstupů, čímž omezené zdroje šetříme. Můžeme zvolit také nějaký kompromis, tj. zvolit nějaký bod např. mezi právě uvedenými. Bod maximální efektivnosti se objeví také u kvadratické produkční funkce na obrázku 5b, avšak pouze tehdy, pokud tato funkce neprochází počátkem souřadnic. To je docela realistické, neboť velmi malé³³ množství vstupů nemusí stačit na realizaci nějaké produkce. Lze volit také inflexní bod, který je na obrázku (5c) na kubické produkční funkci. V tomto bodě je zpravidla jen o málo menší efektivnost, avšak je zde největší derivace, tj. největší změna výstupů (produkce) na jednotkovou změnu vstupů.

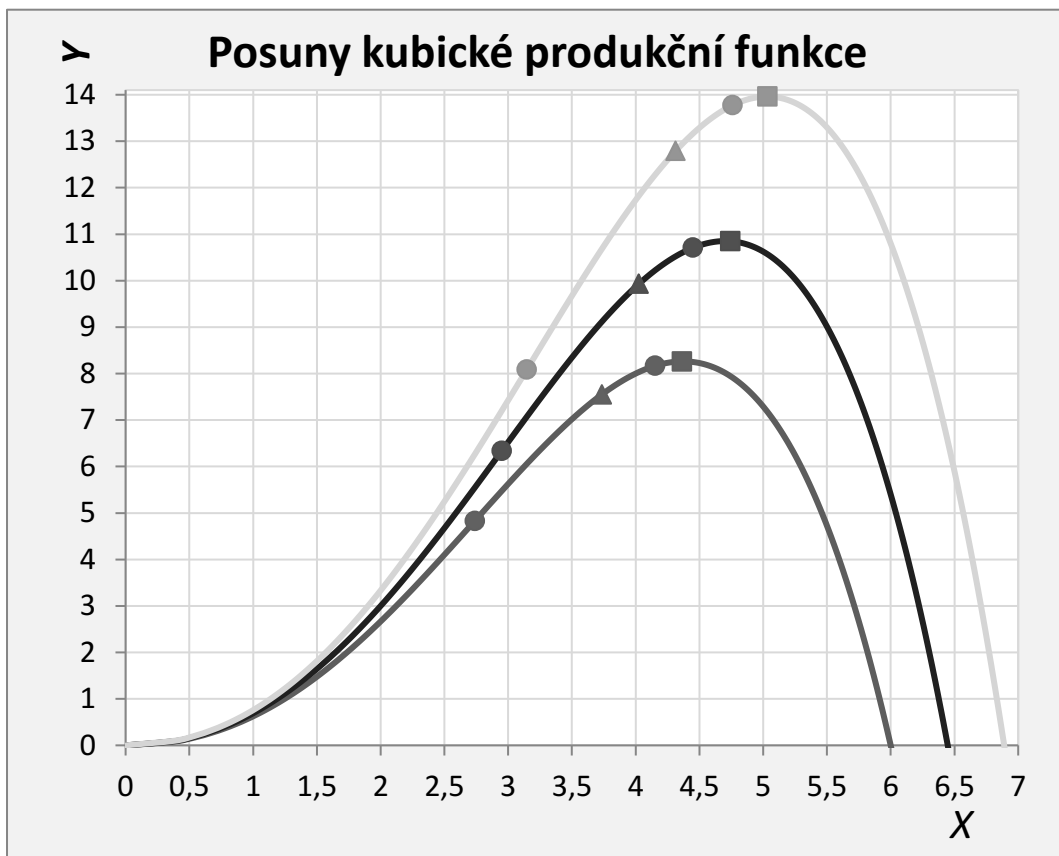
Logickou otázkou je: co se dá dělat, pokud poptávané množství neodpovídá například bodu s maximální efektivností? Zde velmi záleží na tom, zda jde jen o krátkodobý efekt, nebo zda jde o dlouhodobější záležitost. Krátkodobě je obvykle lépe strpět určitou neefektivnost a vyrábět mimo optimum, neboť každá změna něco stojí. Máme také možnost produkovat na sklad a produkci realizovat později apod. Dlouhodobě je potřeba **posunout** či **změnit** produkční funkci tak, aby poptávané množství odpovídalo vybranému bodu produkční funkce, např. s maximální efektivností. Základním způsobem posunu produkční funkce je inovace, změna či vylepšení dané technologie. Jsou ovšem i takové technologie, které lze v určitém rozsahu plynule regulovat. Změna technologie ovšem znamená investice a tam je potřeba posoudit návratnost takové investice. Současné inovace v intencích průmyslu 4.0 tuto pružnost většinou podporují.

³³ Např. úroda se objeví až po dodání většího než kritického množství. Vzniká tak zajímavý problém kvantování produkce na celé domy, celá zvířata, automobily apod. Křivka produkční funkce pak přestane být hladká, nýbrž má zubatý vzhled.

3.4 Produkční funkce v dynamickém tvaru

Na dynamický tvar produkční funkce se lze dívat jako na sled statických stavů. Každá produkční funkce se může posouvat, měnit a spolu s nimi se budou posouvat a měnit také její významné body, které se budou pohybovat po nějaké trajektorii. Tyto trajektorie představují rovněž produkční funkci, která zachycuje postupný vliv přizpůsobování firmy nebo jiného ekonomického systému na situaci na trhu, a to jak extenzivním, tak intenzivním způsobem, tj. buď prostřednictvím zvyšování vstupů, nebo prostřednictvím inovací. Následující obrázek 7 je příkladem dvojnásobného časového posunu kubické produkční funkce. Tento obrázek současně zobrazuje trajektorie bodů maximální produkce (\square), efektivnosti (Δ) a inflexní body (\circ). Pokud má smysluplnou interpretaci také rozdíl výstupů a vstupů, jako např. v mikroekonomické teorii firmy je rozdíl *celkových tržeb TR* a *celkových nákladů TC*, lze v tomto případě zobrazit také body maximálního *ekonomického zisku EP* viz bod označený (\bullet).

Obrázek 7: Posuny klíčových bodů kubické produkční funkce



Zdroj: vlastní zobrazení

V rámci dynamické úlohy je nezbytné odvodit ještě dynamickou produkční funkci. Ta se bude zabývat výhradně změnami v čase. Budou v ní vystupovat samé dynamické charakteristiky dosud uvedených veličin, přičemž budou odvozeny ze vztahů použitých ve statické úloze. Tyto dynamické charakteristiky budou definovány pro výstupy (Y).

- absolutní přírůstek $\Delta(Y) = Y_j - Y_{j-1}$ (42)

- tempo růstu $G(Y) = \Delta(Y)/Y_{j-1} = I(Y) + 1$ (43)

$$- \text{ koeficient změny (index) } I(Y) = Y_j/Y_{j-1} = G(Y) - 1 \quad (44)$$

Index (j) je zaveden v časové řadě, která má (n) členů, jako pořadové číslo jednotlivých členů posloupnosti $j = 1, 2, \dots, n$. Často jde o letopočty. Tato varianta tzv. časové produkční funkce bude použita v kapitole 4, která se zabývá prognostickými úvahami, zejména prolongací, ale i vlivem opatření proti epidemii Covid 19. Z výrazů (43) a (44) lze odvodit exaktní vztahy mezi uvedeným stejnorodými dynamickými charakteristikami. Tempo růstu výstupů je funkcí tempa růstu vstupů a efektivnosti:

$$G(Y) = G(X) + G(Ef) + G(X) \cdot G(Ef) \quad (45)$$

Index výstupů je součin indexů vstupů a indexu efektivnosti:

$$I(Y) = I(X) \cdot I(Ef) \quad (46)$$

Vztah (45) by přešel v hledanou aditivní vazbu dynamických parametrů pokud by se vynechal poslední multiplikativní³⁴ člen $G(X) \cdot G(Ef)$.

Výraz (45) a (46) představuje dvě formy vyjádření **dynamické produkční funkce**. Tyto výrazy vyjadřují relativní změnu výstupu (produktu), tj. $G(Y)$ nebo $I(Y)$ jako funkci dvou faktorů, kterými jsou:

- relativní změny vstupů jako indikátoru extenzivních faktorů, $G(X)$ nebo $I(X)$ a
- relativní změny efektivnosti jako indikátoru intenzivních faktorů, $G(Ef)$ nebo $I(Ef)$

Na změně výstupu se podílí jak změna extenzivních faktorů, tak změna intenzivních faktorů. Má proto smysl vliv jednotlivých změn jednoznačně kvantifikovat. Vhodným výrazem pro tuto kvantifikaci je multiplikativní výraz (46), tj. nikoliv aditivní výraz (45). Je tomu tak proto, že řešení úlohy odvození vztahů pro vyjádření podílů vlivu vývoje faktoru kvantitativního a kvalitativního se neobejde bez nalezení nějaké výchozí aditivní vazby, v které vystupuje každá ze tří uvažovaných dynamických charakteristik **jen jednou**. Proto je potřeba vyjít ze zlogaritmovaného výrazu (46)

$$\ln I(Y) = \ln I(X) + \ln I(Ef) \quad (47)$$

Tento výraz je jediný vhodný pro odvození dynamických parametrů extenzity a intenzity, které jsou konstruovány, tak aby generovaly pro základní typy vývojů daných její typologií předem stanovené dobře interpretovatelné hodnoty, které jsou uvedeny v obrázku 5. Tyto parametry jsou dány výrazy (48) a (49), detaily viz např. (Kotěšovcová, Mihola, Wawrosz 2017):

Dynamický parametr intenzity

$$i = \frac{\ln I(Ef)}{|\ln I(Ef)| + |\ln I(X)|} \quad (48)$$

Dynamický parametr a extenzit

$$i = \frac{\ln I(X)}{|\ln I(Ef)| + |\ln I(X)|} \quad (49)$$

³⁴ Tento problém je podrobně rozebrán v (Mihola, 2007b, s. 448-450).

Intenzivní vývoj je vymezen jako protiklad vývoje **extenzivního**, který představuje vývoj, v němž se mění proporcionálně pouze rozsah produkce, protože se nemění efektivnost. Při **čistě extenzivním** vývoji je logické, že parametr extenzity nabývá hodnoty 1, tj. ve vyjádření v % právě 100 %, zatímco parametr intenzity nabývá hodnoty 0 či 0 %. Analogicky při čistě intenzivním vývoji parametr intenzity nabývá hodnoty 1, tj. ve vyjádření v % právě 100 %, zatímco parametr extenzity nabývá hodnoty 0 či 0 %.

Stagnace výstupů nastávají při úplné kompenzaci působení obou uvažovaných faktorů, tj. extenzity a intenzity, buď je růst efektivnosti kompenzován poklesem vstupů, $i = 0,5$ a $e = -0,5$ nebo $i = 50\%$ a $e = -50\%$, nebo je pokles efektivnosti kompenzován růstem vstupů $i = -0,5$ a $e = 0,5$ nebo $i = -50\%$ a $e = 50\%$ apod. Pokud působí oba faktory stejně na růst $i = 0,5$ a $e = 0,5$ nebo $i = 50\%$ a $e = 50\%$. Pokud působí oba faktory stejně na pokles $i = -0,5$ a $e = -0,5$ nebo $i = -50\%$ a $e = -50\%$. Typologie vývoju vymezuje též prostor pro smíšené vývoje.

Zdůrazněme ještě, že výše uvedené dynamické parametry lze aplikovat i v dalších oblastech. Mezi jednu z nejstarších úloh poměřování vlivu kvantity a kvality patří analýza vývoje tržeb, s kterou se setká každý podnikatel či obchodník, který prodává své zboží za nějakou více či méně proměnlivou cenu. V nejjednodušším případě mohou tržby růst buď výhradně vlivem růstu cen, při stálém prodaném množství, nebo mohou růst jen vlivem změny prodaného množství při cenách stálých. V takovém případě je zřejmé, že na změnu tržeb působil jen jeden z uvedených vlivů. V prvním případě šlo o výhradní, tj. 100 % vliv změny ceny a ve druhém případě o výhradní, tj. 100 % vliv změny prodaného množství, což odpovídá spíše krátkému období. V delším období jsou mnohem častější situace, kdy dochází k růstu tržeb, při současném či postupném vlivu změn jak cen, tak prodaného množství. Také nelze vyloučit případ, kdy v určitém období působí sice dva faktory, avšak protichůdně, tj. ceny klesají, avšak prodané množství roste, nebo naopak prodané množství klesá, avšak ceny rostou. Tyto protichůdné vlivy se mohou zcela vyvážit tak, že výsledné tržby se nezmění. Ani tyto varianty ještě nejsou z hlediska reálných možností vyčerpávající. Všechny uvedené či analogické situace totiž mohou nastat také při poklesu tržeb. Není pochyb o tom, že uvedené skutečnosti si mohli uvědomovat obchodníci již ve starověku. Není ale známo, že by se někdo pokusil o exaktní způsob vyjádření podílu vlivu vývoje cen a vývoje změny prodaného množství na vývoj tržeb. Nalezli jsme pouze některé pokusy o vyjádření těchto podílů vlivů pro případy růstu tržeb zajišťovaného jak růstem cen, tak růstem prodaného množství, a to jako podílu tempa růstu cen nebo tempa růstu prodaného množství a tempa růstu tržeb.

Podobně historickou úlohou je analýza vývoje zisku vzhledem k vývoji příjmů a nákladů. Lze si vystačit s tvrzením, že zisk bude maximální, pokud budeme maximalizovat zisk při současné minimalizaci nákladů? Jsou takové množiny podnikatelských aktivit daných například produkční funkcí, které umožňují výběr jediné optimální podnikatelské varianty splňující všechna 3 uvedená kritéria: maximalizace zisku, maximalizace příjmů i minimalizace nákladů. Avšak ukázalo se také, že každé z uvedených kritérií může vést k jiné podnikatelské variantě.

3.5 Dvoufaktorová produkční funkce

Produkční funkce může vyjadřovat vztah mezi jedním výstupem v závislosti na jednom vstupu či faktoru, což ovšem není příliš častý jev. Na většinu jevů má vliv více komponent, přitom si lze snadno představit situaci s jedním výstupem, například elektrárna produkuje pouze elektrický proud a neprodává další produkty jako např. teplo. Vstup je jen velmi zřídka kdy jediný, přirozené je, že podnikatel hledá vhodné výrobní faktory, které se snaží co nejlépe zkombinovat, aby dosáhl synergického efektu.

Častější je analýza, kde je zjevné, že zhotovení určitého produktu sice vyžaduje více výrobních faktorů, avšak v rámci analýzy budou zvažovány všechny vstupy až na jeden za optimální, takže necháme ostatní vstupy za neměnné a za proměnlivý zvolíme jen jeden z nich. Hledáme např. produkční funkci kde výstupem je dosažená sklizeň rajčat (v kg) z pokusného pole v závislosti na závlaze (v l).

Jednofaktorovou funkcí je také situace, kdy skutečně jeden ze dvou faktorů u funkcí uvažovaných v tabulce 1 je skutečně konstantní. Například produkční funkce na 4 řádku této tabulky, která vyjadřuje tržby (TR) jako součin ceny (p) a prodaného množství (Q). Pokud budou ceny stálé, budou tržby přímo úměrné prodanému množství a pokud bude konstantní prodané množství, tak budou tržby přímo úměrné změně ceny. Podobně je to s příkladem na 7 řádku. Pojedeme-li stálou rychlostí, bude dráha přibývat úměrně narůstajícímu času.

Pokud se budou měnit jak vstupy, tak efektivnost (Ef ; p ; TFP ; v ; a) půjde o dvoufaktorovou produkční funkci. Například u funkce na 4 řádku, tržby budou závislé jak na proměnlivém prodaném množství (Q'), tak na proměnlivé ceně (p). Pro zjištění podílu vlivu změny cen a změny prodaného množství na změnu tržeb, pak lze použít modifikovaný výraz (48) nebo (49). Změnu chápeme obecně jako růst, pokles nebo stagnaci (tj. žádná změna).

Ve většině případů je ale výstupem produkční funkce mnoho různých produktů a mnoho různých vstupů. Potom je vhodné veškeré dílčí vstupy agregovat do jediného agregátního vstupu, a podobně veškeré dílčí vstupy agregovat do jediného agregátního vstupu.

$$Y = f(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad X = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (50)$$

Produkční funkce s jednotkovou efektivností nebo s nejednotkovou efektivností bude mít tvar

$$Y = F(X) \quad Y = Ef.F(X) \quad (51)$$

Klíčovým problémem je nalézt vhodný způsob agregace dílčích složek výstupů do agregátního vstupu a vhodný způsob agregace dílčích složek vstupů do agregátního vstupu. Agregáčnické funkce jsou různého druhu a typu³⁵. V úvahu přicházejí dva typy agregací:

- na bázi prostého či váženého průměru,
- na bázi prostého či váženého souhrnu (např. váženého součtu, součinu apod.).

³⁵ Podrobně viz (Mihola, Pastrňák, 1979, s. 20–32).

Druhy agregací odpovídají různým druhům průměrů, např. aritmetický, geometrický, harmonický, kvadratický apod. Volbou druhu a typu agregace ve statické úloze určíme volbu druhu a typu agregace v dynamické úloze a naopak. Pro odvození těchto vztahů se mimo jiné využívá tzv. přímý a nepřímý výpočet, který musí dát shodný výsledek. To je přirozený důsledek toho, že výpočet téhož jinou cestou nemůže dát jiné řešení. Např. průměrný meziroční index růstu v časové řadě n veličin se dá spočítat přímým výpočtem, tak, že vytvoříme $n-1$ odmocninu zlomku konečné a počáteční veličiny. Nepřímý výpočet dovoluje spočítat průměrný meziroční index jako geometrický průměr $n-1$ meziročních indexů. Pokud bychom použili například aritmetický průměr meziročních temp růstu, nedostaneme správný výsledek. Volba druhu a typu agregace tedy není libovolná, musí odpovídat zákonitostem dané úlohy, podobně jako volba vhodného průměru. Vyhledávání náležitého nepřímého výpočtu v podobě aditivní agregace dílčích dynamických charakteristik je klíčem k řešení úlohy vyjádření podílu vlivu vývoje výrobních faktorů na vývoj produktu. Takovým vhodným vztahem je např. výraz (47).

Ve většině případů produkčních funkcí uvedených v tabulce 1 je řešení druhu a typu agregace prosté a intuitivní. Problematika řešení agregace dílčích vstupů a výstupů v produkční funkci na řádce 2 je elegantně vyřešena u produkční funkce na řádce 3. Využívá se toho, že produkt i každý vstup má nějakou svou cenu. Finanční vyjádření celkových příjmů je váženou agregací množství různé produkce vážené jejich cenami. Analogicky finanční vyjádření celkových nákladů je váženou agregací množství různých výrobních faktorů vážených jejich cenami (mzdami, nájmy, poplatky apod.).

Produkční funkce na řádce 4 tabulky 1 se obvykle používá pro analýzu jedné komodity. Na národohospodářské úrovni přechází problém na problematiku inflace, kde se hledá změna cenové hladiny pomocí cenových indikátorů nebo tzv. deflátoru. Nejkomplikovanější je problém agregací u národohospodářské funkce na řádce 5 tabulky 1. Autoři dospěli v rámci svého výzkumu k názoru, že vhodnou agregační funkcí pro agregaci dílčích výrobních faktorů pro národohospodářskou produkční funkci uvedenou v tabulce 1 na řádce 5 je multiplikativní agregace v podobě váženého geometrického průměru. Takovou funkcí je např. Cobb-Douglasova produkční funkce³⁶.

$$Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} \quad (52)$$

(Y) produkt (například HDP), (L) práce (labor), (K) kapitál (capital). (A) souhrnná produktivita faktorů (TFP total factor productivity), α je váha výrobního faktoru práce, β je váha výrobního faktoru kapitál. Často používaným předpokladem je součet vah rovný 1, tj. $\alpha + \beta = 1$, pak platí $\alpha = 1 - \beta$. Tyto váhy mají interpretaci elasticit.

Uvedenou Cobb-Douglasovu produkční funkci lze zapsat také pomocí rovnic (53) a (16) jako součin souhrnné produktivity faktorů TFP a agregační funkce práce a kapitálu X . Tato agregační veličina se nazývá také TIF souhrnný input faktor $X = TIF$

$$Y = TFP \cdot TIF \quad (53)$$

$$TIF = f(L, K) = L^{\alpha} \cdot K^{\beta} \quad (54)$$

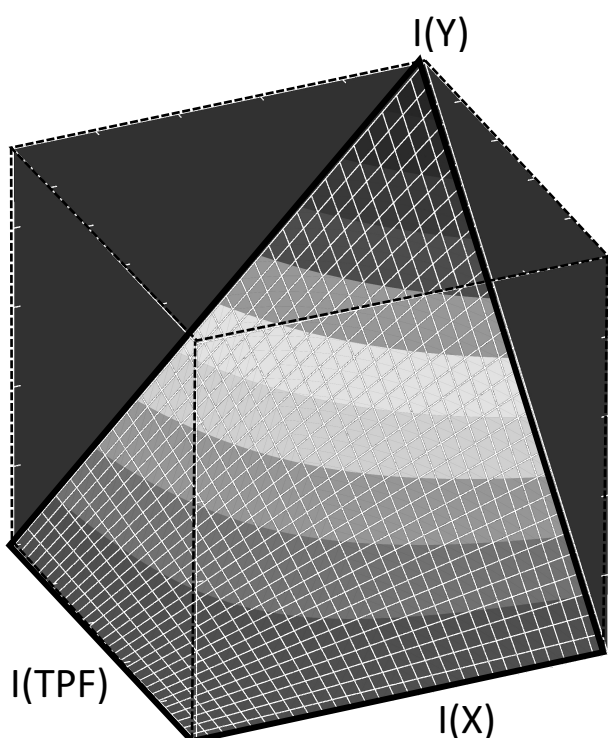
³⁶ Se stejným vyjádřením pracuje např. (Černý 2011); též výraz (15) v rešerši.

Výraz (53) je vlastně dvoufaktorová produkční funkce, která umožňuje řešit problém měření podílu vlivu vývoje intenzivních a podílu vlivu vývoje extenzivních faktorů na vývoj výstupů (produktu). Dynamizací produkční funkce (53) pomocí koeficientu změny získáme (podobně jako výraz (30)):

$$I(Y) = I(TFP) \cdot I(TIF) \quad (55)$$

Statickou produkční funkci (53) stejně jako odpovídající dynamickou produkční funkci (55) lze zobrazit jako sedlovou plochu s hyperbolickými izokvantami stálých výstupů (produkce) či stálého indexu $I(Y)$ nebo tempa růstu výstupů (produkce) $G(Y)$. Tato funkce je základem pro odvození úplné typologie vývoje, které podrobně zkoumají a popisují, jak se extenzivní a intenzivní faktory podílejí na změně výstupu – tj. jakým způsobem se extenzivní a intenzivní faktory mění a jak jejich změna přispívá k celkové změně výstupu³⁷. Grafickým zobrazením dynamické produkční funkce (55) je na obrázku 8. Vzhledem k tomu, že v tomto vztahu jsou 3 proměnné, z nichž jedna je dána násobením dvou zbývajících, jde o graf násobení, který má podobu sedlové plochy. Vodorovné řezy touto funkcí představují substituční hyperbolické izokvanty stálého indexu (tempa růstu) výstupu (produkce), který lze dosáhnout různou kombinací $I(TPF)$ a $I(TIF)$. Naznačené svislé řezy jsou lineární a představují dynamickou produkční funkci buď s konstantním indexem (tempem růstu) vstupů $I(X)$ nebo s konstantním indexem (tempem růstu) souhrnné produktivity faktorů $I(TPF)$.

Obrázek 8: Dynamická produkční funkce pro odvození úplné typologie vývoje



Zdroj: vlastní zobrazení

³⁷ Viz (Mihola, 2017, s. 935–951).

Výraz (54) lze použít při řešení problému substituce práce kapitálem, neboť stejné produkce lze dosáhnout při různé kombinaci práce a kapitálu a stejného koeficientu změny produktu $I(Y)$ lze dosáhnout různou kombinací koeficientu změny práce $I(L)$ a koeficientu změny kapitálu $I(K)$. Přesto, že historicky převažuje substituce práce kapitálem, tak individuálně mohou podniky realizovat i opačný proces, tj. nahradit nějaké zařízení zaměstnanci, pokud se to jeví v daném případě jako výhodné. Právě modelování substituce je pádným důvodem pro volbu **multiplikativní** agregace práce a kapitálu. Pokud bychom totiž volili váženou či prostou aditivní agregaci, nebylo by možné optimalizovat proces substituce. Aditivní agregace by vedla k lineární funkci a tudíž k nerealisticky lineárním izokvantám stálého souhrnného vstupu X (TIF), zatímco multiplikativní vazba daná např. výrazem (54) představuje sedlovou plochu, která generuje reálně pozorovatelné hyperbolické izokvanty stálého souhrnného vstupu X (TIF). Pouze hyperbolické izokvanty umožňují provádět optimalizaci substituce. Dalším důvodem pro multiplikativní agregaci je skutečnost, že lineární izokvanty vždy protínají jednu nebo častěji obě souřadné osy, což by znamenalo, že by mohla existovat situace, kdy by jeden z uvažovaných faktorů práce L nebo kapitálu K mohl být i nulový, což neodpovídá realitě. Neexistuje ekonomický systém zcela bez kapitálu, neboť i primitivní nástroj je kapitál a také žádný ekonomický systém, byť významně automatizovaný není zcela bez účasti člověka, který jej hlídá, opravuje, seřizuje apod.

Často v produkčních funkcích nevystupuje exaktně agregát vstupů X a také se často v produkčních funkcích explicitně nevyskytuje veličina efektivity. To znamená, že je pak obtížné rozlišovat úlohu substituce vstupů a vývoje efektivity a tím i intenzity vývoje. Tyto úvahy budeme ilustrovat na následujících čtyřech typických produkčních funkcích, které vyjadřují HDP jako funkci faktoru práce (L) a kapitálu (K) a řady parametrů, z nichž některé mají povahu efektivity E_f nebo národohospodářsky TPF, tj. souhrnná produktivita faktorů.

Budou to jen různé modifikace funkce (56)

$$HDP = F(K, L) \quad (56)$$

kde $TPF = 1$ nebo

$$HDP = TPF \cdot F(K, L) \quad (57)$$

Agregační funkci TIF vyjadřuje různě definovaná $F(K, L)$. Lze potom psát

$$HDP = TPF \cdot TIF \quad (58)$$

Z dosavadní analýzy různých produkčních funkcí lze odvodit, že základním tvarem produkční funkce s více faktory je vztah (57). Na každé takové funkci lze řešit problém intenzity, jejíž indikátorem je změna TFP (E_f apod.) a problém substituce, který se zabývá různými kombinacemi sledovaných faktorů dávajících konstantní TIF . Proto by měla mít každá produkční funkce tento tvar. Pokud se pracuje pouze s faktory práce L a kapitálu K , lze takovou produkční funkci pro $TFP = 1$ snadno zobrazit. Například Cobb-Douglasova produkční funkce³⁸ pro $\alpha = 0,35$ a $\beta = 1 - \alpha = 0,65$.

³⁸ Jde o příklad asymetrických vah někdy uváděných jako obvyklé pro vyspělé ekonomiky. Viz (Hájek, 2006, s. 171).

$$Y = L^{0,35} \cdot K^{0,65} \quad (59)$$

je nakreslena na obrázku 9. Při takto volených vahách α a β má agregační funkce (59) nesymetrické hyperbolické izokvanty.

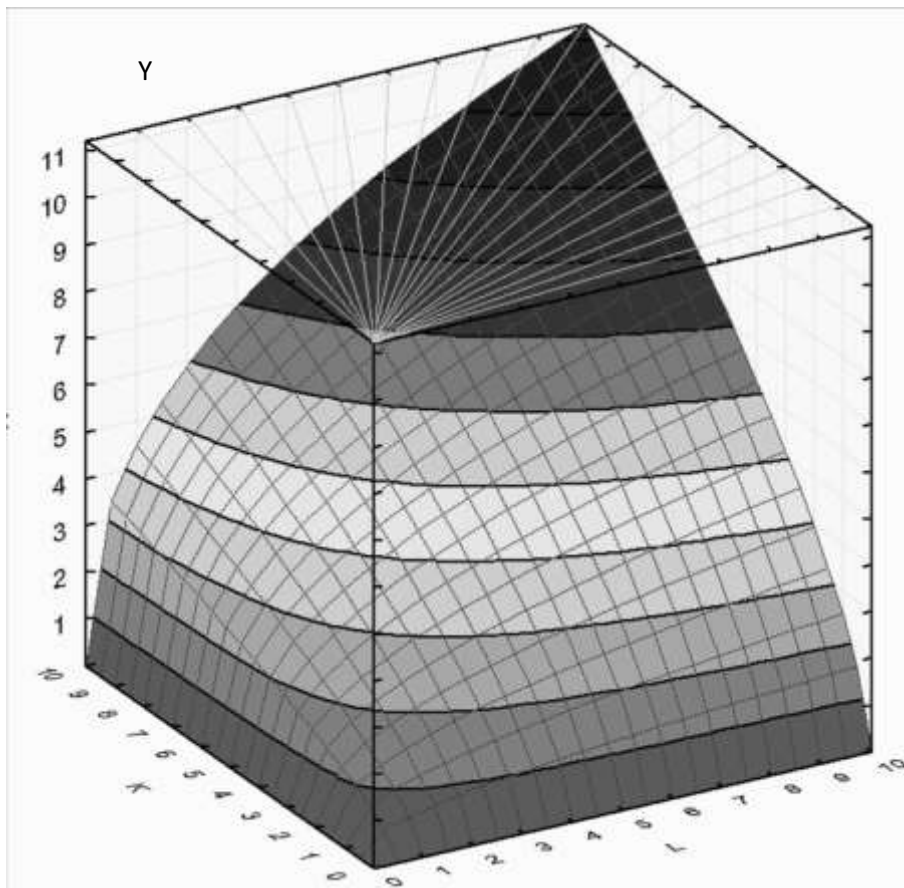
Ve vícefaktorové produkční funkci lze dynamizovat i veličinu *Total Input Factoru* (54), s tím, že budeme zvažovat jen dva faktory a proto položíme součet dynamických vah roven 1, tj. $\alpha + \beta = 1$.

$$I(TIF) = I^\alpha(L) \cdot I^{(1-\alpha)}(K) \quad (60)$$

Pokud pravou stranu výrazu (60) dosadíme za $I(TIF)$ do rovnice (55), můžeme odvodit³⁹ rovnici růstového účetnictví

$$G(Y) = G(TFP) + \alpha \cdot G(L) + (1 - \alpha) \cdot G(K) \quad (61)$$

Obrázek 9: Příklad asymetrické agregační funkce práce a kapitálu



Zdroj: vlastní zobrazení

³⁹ Přesný postup odvození viz (Mihola, Wawrosz, 2014, s. 588–9).

Výhoda této rovnice, oproti rovnici klasického růstového účetnictví⁴⁰, spočívá v jiné interpretaci dynamické váhy (elasticity) α , která vystupuje jak ve statické (53), tak hlavně v dynamické verzi agregační funkce (55). Vzhledem k tomu, že koeficienty změny (indexy) jsou bezrozměrná čísla, nemusí se řešit problém různých jednotek měření rozsahu výrobního faktoru práce (L) a kapitálu (K). Nenalezli jsme žádný důvod, proč by koeficient změny práce $I(L)$ měl mít ve vztahu (61) jinou váhu, než koeficient změny kapitálu $I(K)$. Různé váhy by vedly k těžko zdůvodnitelné asymetrii izokvant stálého koeficientu agregačních vstupů $I(Y)$ ve vztahu (61). Pro symetrii hovoří také to, že substituce historicky probíhá ve směru substituce práce kapitálem, avšak v dílčích případech může probíhat i naopak. Dalším mnohem obecnějším důvodem je to, že substituce práce kapitálem má sice velmi mnoho podob a je na různé úrovni v různých zemích, avšak je to celosvětová optimalizační aktivita, která má své pionýry a své napodobitele. Jde však v souhrnu o jednotný proces. Technický pokrok je celosvětová aktivita, a proto považujeme ze správné položit

$$\alpha = 0,5, \text{ tj. } (1-\alpha) = 0,5 \quad (62)$$

Tato volba znamená, že koeficient změny agregačních vstupů lze vypočítat jako prostý geometrický průměr koeficientů změny práce a koeficientu změny kapitálu.

$$I(X) = \sqrt{I(L) \cdot I(K)} \quad (63)$$

Toto zjednodušení růstového účetnictví je v první řadě důsledkem odvození z multiplikativní vazby výrobních faktorů práce a kapitálu reprezentované často používanou Cobb-Douglasovou produkční funkcí (52). Není totiž důvod počítat jiná α pro každý rok či analyzovaný objekt, tak jak je tomu u růstového účetnictví, které bylo odvozeno na základě váženého aditivního vztahu.

Dalším důvodem pro volbu $\alpha = 0,5$ je, že mnohé aplikace, ve kterých se počítají dynamické parametry intenzity a extenzity podle vztahů (48) a (49) upravených pro konkrétní vstupy a výstupy, nemají pro volbu α v obvyklých mezích mezi 0,5 až 0,65 na výsledky podstatný vliv⁴¹, tj. výsledky na toto zjednodušení nejsou citlivé.

3.6 Multifaktorová produkční funkce KLEM

Pokud produkční funkce zahrnuje více vysvětlujících faktorů než dva, jde o více faktorovou nebo multifaktorovou produkční funkci. Příkladem takové funkce je produkční funkce KLEM viz (Klacek, 2006).

Jestliže obecná agregační produkční funkce s n faktory je

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (64)$$

⁴⁰ Váha α a β klasického růstového účetnictví viz např. (Mihola, 2017, s. 58). Jsou tak komplikované v podstatě právě pro to, že vycházejí z aditivní agregace faktorů práce kapitálu váženého svými mezními produkty, což ale neodpovídá realitě. Viz např. (Denison, 1962).

⁴¹ Podrobně viz např. (Mihola, Wawrosz, 2014).

kde Y je produkt (výstup systému) a X_1 až X_n jsou vstupy, tj. vysvětlující proměnné, pak pro produkční funkci KLEM se pracuje se čtyřmi výrobními faktory

K ... kapitál; L ... zaměstnanost; E ... energie; M ... materiál.

Konkretizací výrazu (64) získáme

$$Y = F(K, L, E, M) \quad (65)$$

U této funkce se předpokládá funkční separabilita výrobních faktorů. Ta umožňuje jak dílčí agregace, tak případné vypuštění některého z faktorů. Dalším požadavkem je homotetickost, která značí, výnosy z rozsahu výroby jsou dostatečně rovnoměrně rozložené mezi jednotlivé výrobní faktory.

Splnění podmínek separability a homotetickosti jsou důležité pro nalezení vhodného vyjádření (konkretizace) produkční funkce i pro případné ověřování oprávněnosti vyloučení některých výrobních faktorů. Konkrétní tvar produkční funkce je závislý na typu separability, která může být slabá, parciálně silná nebo úplná silná. Pro testování separability se používá transcendentní logaritmická produkční funkce, která je specifikována jako aproximace druhého řádu k blíže neznámé produkční funkci. Aproximace se provádí pomocí Taylorova rozvoje.

Transcendentní logaritmická produkční funkce je nejucelenější teoreticky fundovaný přístup, který dovoluje stanovení parametrů této funkce avšak za předpokladu existence dlouhých a konzistentních časových řad. V praxi se proto často tento problém řeší použitím čtvrtletních časových řad. Ekonometrické odhady většinou využívají nelineární nebo hřebenové regrese.

Ve vztahu k předchozímu výkladu jde opět o řešení problému agregace dílčích charakteristik v našem případě výrobních faktorů. Na multifaktorovou produkční funkci lze opět uplatnit problematiku měření technického pokroku či změny souhrnné produktivity faktorů, kterou definuje (Klacek, 2006, s. 291) jako⁴²

$$TFP(t) = \frac{Y(t)}{TIF(t)} \quad (66)$$

kde TFP je souhrnná produktivita faktorů; Y je produkt; TIF je souhrnný input faktor, vše v čase t . Toto vymezení má obecnou platnost. K individuálním rozdílům dochází v okamžiku, kdy je zvolena konkrétní forma agregace dílčích výrobních faktorů. V zásadě se liší podle toho, zda je zvolena aditivní či multiplikační agregace. To má zásadní vliv na tvar produkční funkce a na dílčí vztahy mezi souhrnnou produktivitou faktorů a produktivitami dílčích výrobních faktorů. Například při prosté aditivní agregaci výrobních faktorů je souhrnná produktivita faktorů dána harmonickým průměrem produktivit dílčích výrobních faktorů. Lze snadno odvodit, že

$$TFP(t) = \frac{1}{\frac{1}{K(t)} + \frac{1}{L(t)} + \frac{1}{E(t)} + \frac{1}{M(t)}} \quad (67)$$

⁴² Oproti původnímu článku (Klacek, 2006) bylo změněno značení proměnných tak, aby odpovídalo symbolům zavedeným v této monografii.

Klíčové je aby produkční funkce odpovídala co nejlépe realitě a aby byla dostatečně univerzální, tj. např. aby neplatila jen pro malá tempa růstu apod. Poznatky této monografie ukazují, že realitě lépe odpovídá multiplikativní agregace výrobních faktorů. Ukazuje se rovněž, že dvou-faktorová produkční funkce s měřením relativní změny souhrnné produktivity faktorů (efektivnosti) vysvětluje výrobní proces dostatečně, protože většinou není nutné uvažovat další výrobní faktory.

Mnohem závažnější je problematika rušivých elementů, jako je například epidemie a hlavně dopad plošných restrikcí. Problému poruchovosti a neekonomických šoků bude věnován prostor v rámci prognostických simulací vývoje největších ekonomik světa v rámci následující 4. kapitoly.

4 Prognóza vývoje největších ekonomik světa

4.1 USA, Čína, Indie

Aktuálním příkladem využití časové produkční funkce je prognóza vývoje třech největších⁴³ světových ekonomik USA, Číny a Indie. Výstupem této produkční funkce je HDP ve stálých cenách v paritě kupní síly (*mezinárodní \$ 2011*) a vstupem je čas. Prolongace jejich vývoje za období 1992 až 2020 na dalších 10 případně 30 let ukazuje, že s velkou pravděpodobností dojde ke změnám v pořadí největších ekonomik podle HDP. Lze předpokládat, že v obrovských národních ekonomikách zákonitě převládají na desetileté i delší prognózované období především **setrvačné** tendence. Ty jsou doplněny některými očekávanými i neočekávanými poruchami jako jsou např. dopady plošných restrikcí a vypínání ekonomik (lockdownů) vyvolaných snahou ovlivnit vývoj epidemie Covid 19.

V tabulce 2 jsou uvedeny 3 největší ekonomiky v pořadí podle absolutní výše HDP v roce 2020. Ve srovnání s rokem 1992 došlo k několika změnám: Čína se dostala na 1. místo z 5.; USA kleslo na 2. místo; Indie se dostala na 3. místo z 8. Prognóza do roku 2030 byla získána jako součin prolongovaných údajů počtu obyvatel L a produktivity živé práce HDP/L , pro které byla využita polynomická funkce prvního, druhého i třetího řádu nebo exponenciální funkce podle odpovídající těsnosti. Tuto prognózu jsme provedli také pro souhrnnou produktivitu faktorů místo pouhé produktivity živé práce. Vzhledem k tomu, že výsledné změny pořadí byly prakticky stejné, rozhodli jsme se publikovat jako příklad využití produkčních funkcí tuto jednodušší a přehlednější variantu.

Tabulka 2: Prognóza vývoje třech nejsilnějších ekonomik na 10 let

| | | HDP (bilion \$) | | | | | | HDP/L | L | i |
|---|---------------|-----------------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | 1992 | 2020 | 2030 | 2020/1992 | 2030/2020 | 2030/1992 | 2030/1992 | 2030/1992 | 2030/1992 |
| 1 | China | 2151 | 24283 | 41416 | 12,9% | 6,1% | 8,3% | 7,7% | 0,6% | 92,9% |
| 2 | United States | 9503 | 17918 | 22281 | 3,2% | 2,5% | 2,3% | 1,5% | 0,8% | 64,6% |
| 3 | India | 1628 | 8870 | 28020 | 8,8% | 13,6% | 8,0% | 6,5% | 1,4% | 81,7% |

Zdroj: vlastní provedení. Data za roky 1992 a 2020 jsou převzata z World Economic Outlook Database International Monetary Fund⁴⁴. Jsou v paritě kupní síly, mezinárodních \$.

Vysvětlující proměnná je ve všech případech čas t uváděný v rocích prostřednictvím letopočtů, tj. např. 1990 nebo 2030. Velký počet desetinných míst, na které jsou uváděny regresní parametry, je nezbytný. Snížení počtu desetinných míst přináší výrazné odchylky naměřených a odhadovaných hodnot. U každé rovnice je uveden rovněž souhrnný koeficient determinace R^2 .

⁴³ Kritériem velikosti ekonomiky národní ekonomiky je zde absolutní výše HDP ve stálých cenách 2018 (Indie 2013) v paritě kupní síly vyjádřená v amerických \$.

⁴⁴ Viz International Monetary Fund (2020).

Regresní rovnice pro počet obyvatel L :

- USA, $R^2 = 0,9917$

$$L = 2,5546.t - 4827,8 \quad (68)$$

- Čína, $R^2 = 0,9980$

$$L = -0,1274824170.t^2 + 519,4496547752.t - 527\,707,0728967320 \quad (69)$$

- Indie, $R^2 = 0,7297$

$$L = -0,20545319.t^2 + 842,23139928.t - 861\,584,35660050 \quad (70)$$

Regresní rovnice pro hrubý domácí produkt na obyvatele HDP/L :

- USA, $R^2 = 0,9656$

$$HDP/L = 677,46894719.t - 1\,311\,116,77411355 \quad (71)$$

- Čína, $R^2 = 0,9992$

$$HDP/L = -0,22921711.t^3 + 1\,397,47724405.t^2 - 2\,838\,932,93517677.t + 1\,921\,697\,385,47686000 \quad (72)$$

- Indie, $R^2 = 0,9950$

$$HDP/L = 1,2 \cdot 10^{20} \cdot e^{0,05361916821173360000.t} \quad (73)$$

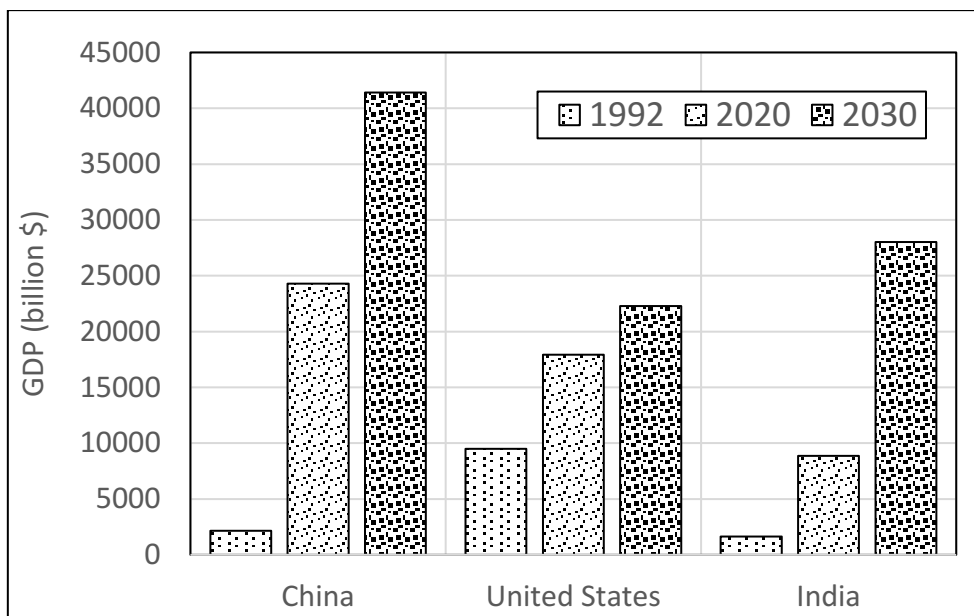
Koeficienty determinace jsou vysoké, většinou vysvětlují danou souvislost z více než 99 %. Pouze lineární odhad vývoje produktivity práce HDP/L v USA vysvětluje rovněž vysokých 96 %. Lineární vývoj je zde přesvědčivý. Jedinou regresní rovnicí s relativně nižším, avšak dostatečně vysokým koeficientem determinace 73 % je kvadratická rovnice vyjadřující vývoj počtu obyvatel v závislosti na čase v Číně. Žádnou lepší rovnici z hlediska těsnosti se nepodařilo najít. Je to způsobeno tím, že vývoj není tak hladký jako ve všech ostatních případech, neboť dochází v údajích za období 2005 až 2020 ke zvlnění údajů o počtu obyvatel. Zvlnění spočívá v tom, že se postupné snižování tempa růstu počtu obyvatel zaznamenalo v posledních 5 až 10 letech, zvyšuje.

Vývoj počtu obyvatel je kromě tabulky 2 zachycen mimo jiné též na obrázku 12. Počet obyvatel USA je ve výchozím roce 1992 třetinový než v Indii a čtvrtinový než v Číně. Růst počtu obyvatel USA je přesvědčivě lineární, jeho růst o dalších 50 mil. obyvatel tak vychází cca na 50 let. Pro Čínu a Indii se ukázal jako nejvhodnější polynom II. stupně. Podstatný rozdíl je v tom, že se křivka Číny blíží své kulminaci, zatímco pro Indii stále významně roste. Je to zřejmý důsledek toho, že Čína již delší dobu usiluje o určitou regulaci vývoje počtu obyvatel, zatímco v Indii se nic takového, vzhledem k tradičním postojům k regulaci reprodukce a porodnosti, neděje.

Vývoj produktivity živé práce HDP/L , který je kromě tabulky 2, zobrazen též na obrázku 9, jasně ukazuje na výrazně vyšší úroveň technické vyspělosti USA, která má ve výchozím roce 1992 HDP/L cca 15 krát větší než Čína i Indie. Přes mírná zvlnění vývoje HDP/L lze velmi dobře vyjádřit vývoj tohoto ukazatele lineární regresní funkcí.

Vývoj *HDP/L* Číny i Indie je akcelerující. Stále rychleji rostoucí produktivitu Číny nejlépe vystihuje polynom třetího stupně, zatímco vývoj v Indii lze nejlépe vystihnout jako exponenciální. To ovšem znamená, že se bude *HDP/L*, při zachování těchto trendů v Číně a v Indii, přibližovat k *HDP/L* v USA.

Obrázek 10: Prognóza HDP v paritě kupní síly třech největších ekonomik světa



Zdroj: vlastní provedení

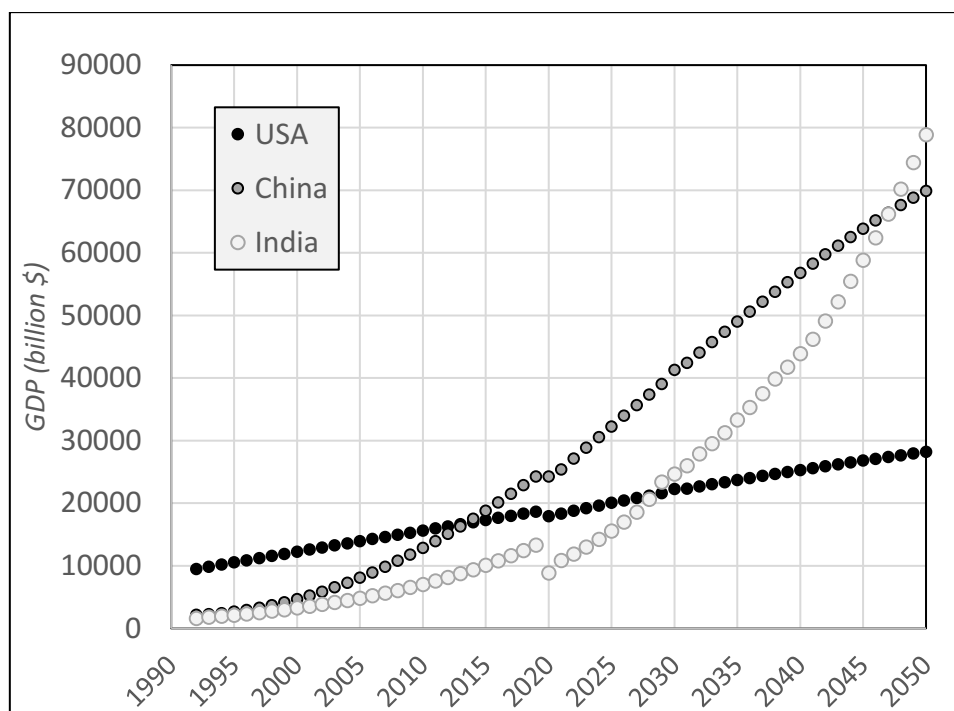
V roce 2020 byla v rámci prognostických propočtů zohledněna opatření v souvislosti s epidemií Covid 19. Databáze MMF, z které byly čerpány všechny výchozí empirické údaje, uvádí pro rok 2020 následující tempa růstu: USA -4,27 %; Čína 1,85 % a Indie -10,29 %. Nejhlubší ekonomická recese nastala v roce 2020 v Indii. USA zaznamenaly rovněž recesi, pouze v Číně došlo k pouhému zpomalení⁴⁵ tempa růstu *HDP*. Je to reakčně podobná situace jako při poslední celosvětové hypoteční krizi v roce 2009, která potvrdila, že zejména Čína, ale i Indie jsou přes svou rostoucí absolutní otevřenost stále ještě relativně uzavřené ekonomiky. Pokud v Číně dochází k restriktivním opatřením, prakticky se netýkají základních průmyslových odvětví. Z tabulky 2 je zřejmé, že dochází ke změnám pořadí i v prognózovaném roce 2030: USA klesá na 3. místo, neboť se před něj dostává také Indie. Postupné změny pořadí na prvních třech místech jsou dobře patrné na obrázku 10, kde jsou zakresleny hodnoty *HDP* tří největších ekonomik za všechna tři sledovaná období.

Tabulka 2 prezentuje prostřednictvím průměrných meziročních temp růstu dynamiku vývoje za obě období, tj. retrospektivu 2020/1992, prognózu 2030/2020 i celé analyzované období 2030/1992. V retrospektivě rostlo *HDP* nejrychleji v Číně, druhé největší tempo růstu bylo v Indii. V perspektivě je nejrychlejší růst *HDP* v Indii. V tabulce 2 lze sledovat ještě průměrná meziroční tempa růstu *HDP/L* a počtu obyvatel

⁴⁵ Předpokládáme v zásadě podobné rozložení dopadů jako při hypoteční krizi v letech 2008 a 2009, byť s jinou intenzitou.

L. Počet obyvatel roste nejrychleji u Indie, kde vychází meziroční průměrné tempo růstu za celé sledované období 2030/1992 1,4 %. V USA je podobně jako v Číně prognostikováno tempo růstu asi poloviční, v USA 0,8 % a v Číně 0,6 %. Nejrychlejší růst počtu obyvatel Indie je zřejmý důsledek toho, že v této zemi se na rozdíl od Číny prakticky neuvažuje o regulaci porodnosti. Oblast sexu je zde tradičně chápána jako „posvátná dimenze“, do které si nikdo netroufne anebo prostě nechce zasahovat, protože pro Indý je to tabu.

Obrázek 11: Prolongace vývoje HDP USA, Číny a Indie



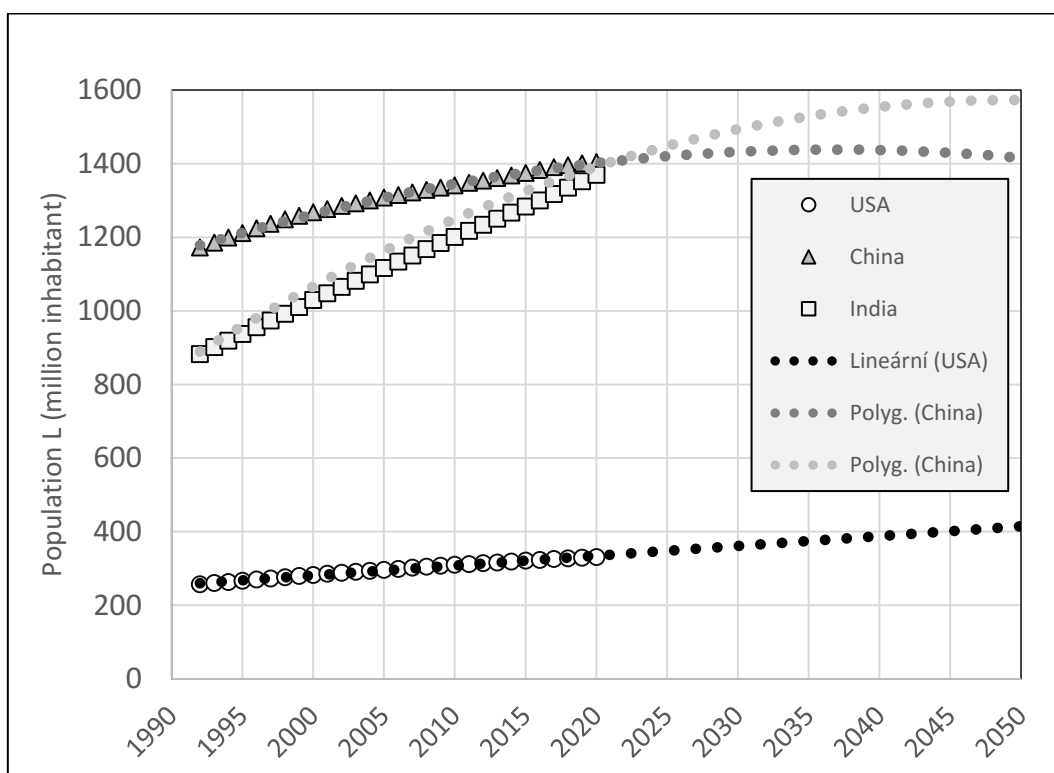
Zdroj: vlastní provedení

Klíčovou informací o kvalitě růstu dává intenzita⁴⁶ (i), která udává, jaký podíl mají na dosaženém vývoji intenzivní faktory, a tudíž do jaké míry je vývoj intenzivní nebo naopak extenzivní. Přesto, že takto pojatá intenzita vychází na vstupech jen z faktoru práce, má velmi dobrou vypovídací schopnost. Intenzita je podle pořadí dle HDP v roce 2020 uvedena v posledním sloupci tabulky 2. Ve všech sledovaných zemích za celé období 1992 až 2030 jsou všechny uvedené země převážně intenzivní. Obdivuhodných 92,6 % dosáhla Čína. Následuje Indie 81,7 %. Nejnižší intenzita 64,6 % vyšla pro USA. To dobře ilustruje kvalitativní vzednutí technologického i vědeckého potenciálu Číny, který se projevuje i ve zvládnutí některých špičkových technologií např. v úspěších jejich kosmického programu i jinde. Vysoká intenzita vývoje ekonomiky Indie je dána jak vlastním potenciálem, tak procesem konvergence ke světovému vývoji. Na intenzitu USA je potřeba pohlížet tak, že jejich technologie je

⁴⁶ Intenzita je vypočtena podle vztahu (38) případně (48), kde výstupy tvoří index HDP, tj. $I(HDP)$; vstupy jsou indexem faktoru práce L , tj. $I(L)$ a index efektivnosti je index produktivity práce, tj. $I(HDP/L)$ viz analogické vztahy (73) a (74) pro souhrnný input faktor TIF a souhrnnou produktivitu faktorů TFP v monografii (Mihola a kol., 2017, s. 55).

sice stále na dobré úrovni, kterou si už jen **udržují**, což se zákonitě projeví nižší intenzitou. Dalším důvodem je skutečnost, že USA stále ještě patří mezi lídry rozvoje některých unikátních technologií, což rovněž přispívá k vykazování nižších temp růstu než u „napodobitelů“. Současně je ale potřeba poznamenat, že USA vykazuje již od 70 let některé alarmující trendy např. v dalším růstu již tak astronomické zadluženosti⁴⁷, která je umožňována každoročním zvyšováním dluhového stropu. Závažným procesem je sílící dedolarizace, masivní výprodej pozemků cizím státním příslušníkům, krize základního a středního školství apod.

Obrázek 12: Prolongace vývoje počtu obyvatel USA, Číny a Indie



Zdroj: vlastní provedení

Vývoj HDP pro 3 nejsilnější ekonomiky byl prognózován též až do roku 2050. Z obrázku 11 je zřejmé, že v tomto období pravděpodobně ještě Indie předběhne v absolutní výši HDP i Čínu. Prolongace vývoje absolutního vývoje HDP USA, Číny a Indie byla získána vynásobením počtu obyvatel L a produktivity práce představované HDP/L . Obě tyto veličiny byly prolongovány vhodnou funkcí, jak je to zobrazeno na obrázku 12 v případě počtu obyvatel a na obrázku 13 v případě HDP/L. Jednorázový vliv plošných opatření v souvislosti s Covid 19 je v roce 2020 výrazný (zejména u Indie), avšak v rámci dlouhého období zatím tak významná nejsou. Na obrázku 11 jsou v průběhu vývoje HDP i vývoje HDP/L na obrázku 13 patrné v roce 2020 poklesy, které se v následujících letech opět vyrovnávají. Ovšem mohou se vyskytnout jiné celosvětové problémy, které je ale obtížné předpovídat, viz známá publikace Černá

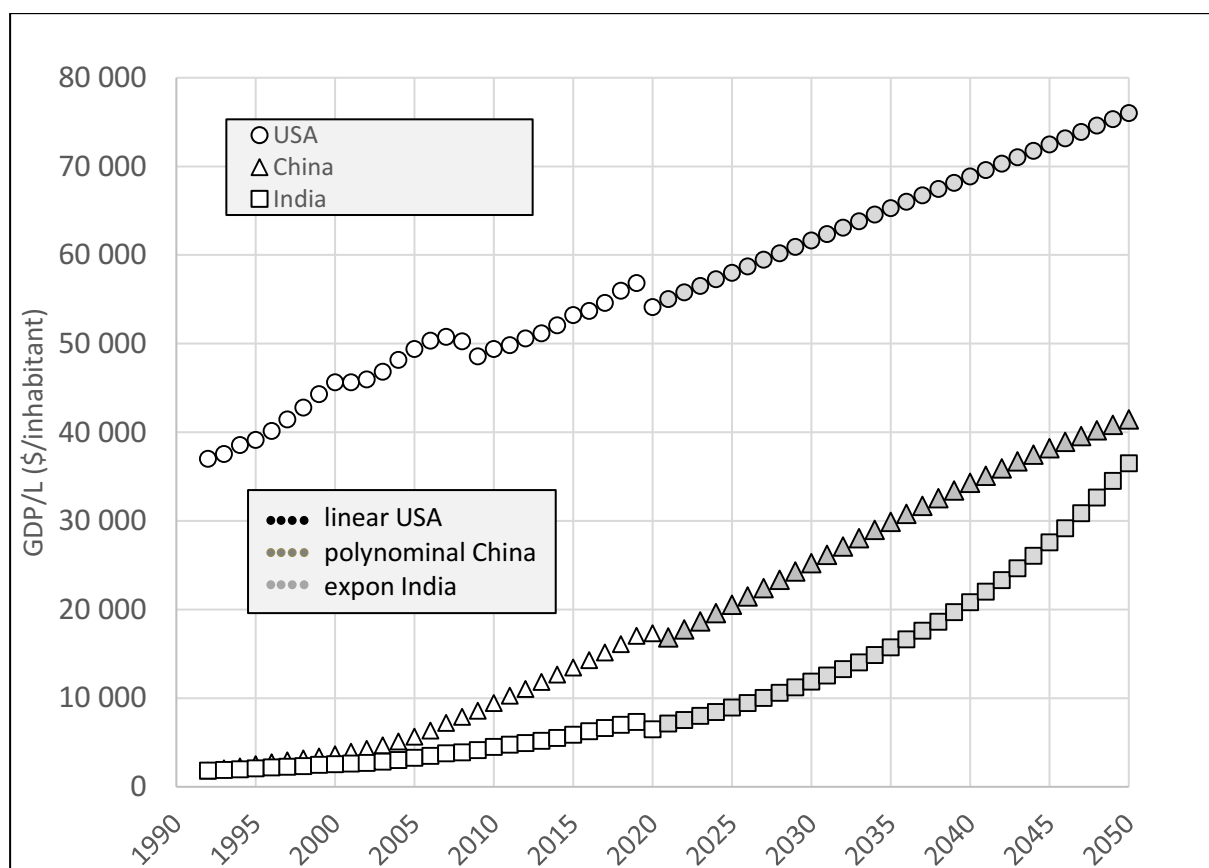
⁴⁷ Zajímavé video na toto téma je např. na <https://www.youtube.com/watch?v=yPfaT2vLu8k> autor Peter D. Schiffer.

labuť část druhá *Předpovídat, není možné* (Taleb, 2011, s. 151). V této monografii se zabýváme především setrvačnými procesy, které jsou o to významnější, čím robustnější celky s zabýváme. Setrvačnost je mimořádně významný fenomén, který chrání přírodu a společnost před rizikem důsledků příliš náhlých změn. Pro prognostické úvahy jsou setrvačné procesy základní, teprve na ně je možno „navěsit“ některé náhlé, neočekávané a těžko prognostikovatelné změny.

Na obrázku 12 je zakreslen současný demografický vývoj analyzovaných národních ekonomik a jeho prognóza až do roku 2050. Jestliže podstatně menší počet obyvatel USA roste téměř přesně lineárně, tak rychleji rostoucí počet obyvatel Číny a ještě rychleji rostoucí počet obyvatel Indie vykazuje postupné zpomalení tempa růstu.

Růst produktivity práce na obrázku 13 ukazuje, že podstatně vyšší produktivita práce USA roste lineárně. Rovněž lineárně se k ní přibližuje Čína, neboť má poněkud vyšší tempo růstu. Nejnižší hodnoty produktivity živé práce *HDP/L* sice pro celé sledované období vykazuje Indie, avšak pro prolongaci se jeví jako nejvhodnější exponenciální funkce.

Obrázek 13: Prolongace vývoje HDP/L, USA, Číny a Indie



Zdroj: vlastní provedení

4.2 Prognóza vývoje deseti největších ekonomik světa

Na stejných principech lze pomocí časové produkční funkce rozšířit prognózu na deset největších ekonomik světa podle absolutní výše HDP ve stálých cenách v paritě kupní síly v mezinárodních dolarech. Údaje pocházejí ze stejného zdroje databáze World Economic Outlook Database International Monetary Fund. Mezi deseti největšími národními ekonomikami jsou samo sebou již analyzované státy USA, Čína a Indie. Tabulka 3 má stejnou strukturu ukazatelů jako tabulka 2 v předchozí subkapitole.

Jednotlivé národní ekonomiky jsou v tabulce 3 seřazeny podle absolutní výše *HDP* v roce 2020. Všechna meziroční tempa růstu jsou kladná ve všech sledovaných obdobích. Za celé analyzované a prognózované období diferencovaně roste také produktivita živé práce *HDP/L*; počet obyvatel *L* stagnuje v Japonsku a jen o desetinu procenta průměrně ročně roste v Rusku a v Německu, největší růst je prognózován v Indii a v Indonésii.

Časové prognostické rovnice byly odvozeny pomocí regresní a korelační analýzy na stejném principu jako v subkapitole 4.1, tj. prolongovány byly počty obyvatel *L* a produktivita živé práce *HDP/L*. *HDP* bylo vypočteno jako součin těchto veličin. Vědomě jsme nepoužili souhrnnou produktivitu práce, jejíž využití je komplikovanější, avšak v tomto případě dává velmi podobné závěry. Na *HDP* byl v roce 2020 uplatněn koeficient vlivu poklesu *HDP* vlivem restriktivních opatření jednotlivých vlád jako reakce na epidemii Covid 19, který byl skutečně vykázán na sklonku roku 2020, tj. tempo růstu $G(HDP)$, Čína 1,9 %; Indonésie -1,5 %; Rusko -4,1 %; USA -4,3 %; Japonsko -5,3 %; Brazílie -5,8 %; Německo -6,0 %; Francie -9,6 %; Anglie -9,8 % a Indie -10,3 %. Jediná Čína z uvedených zemí nezaznamenala pokles tempa růstu *HDP*. Všechny ostatní uvedené země byly v loňském roce menší či větší recesy.

Tabulka 3: Prognóza vývoje deseti nejsilnějších ekonomik světa na 10 let

| | | HDP (bilion \$) | | | | | | HDP/L | L | i |
|----|----------------|-----------------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | 1992 | 2020 | 2030 | 2020/1992 | 2030/2020 | 2030/1992 | 2030/1992 | 2030/1992 | 2030/1992 |
| 1 | China | 2151 | 25229 | 41416 | 13,1% | 5,7% | 8,3% | 7,7% | 0,6% | 92,9% |
| 2 | United States | 9503 | 19108 | 22281 | 3,6% | 1,7% | 2,3% | 1,5% | 0,8% | 64,6% |
| 3 | India | 1628 | 10583 | 28020 | 9,8% | 11,4% | 8,0% | 6,5% | 1,4% | 81,7% |
| 4 | Japan | 3940 | 5041 | 5561 | 1,2% | 1,1% | 0,9% | 0,9% | 0,0% | 95,6% |
| 5 | Germany | 2705 | 3928 | 4456 | 1,9% | 1,4% | 1,4% | 1,2% | 0,1% | 90,0% |
| 6 | Russia | 2489 | 3868 | 4957 | 2,2% | 2,8% | 1,9% | 1,8% | 0,1% | 97,0% |
| 7 | Indonesia | 928 | 3428 | 5741 | 6,8% | 5,9% | 5,0% | 3,7% | 1,3% | 73,1% |
| 8 | Brazil | 1580 | 3079 | 3761 | 3,4% | 2,2% | 2,4% | 1,3% | 1,0% | 55,7% |
| 9 | United Kingdom | 1533 | 2773 | 3388 | 3,0% | 2,3% | 2,2% | 1,5% | 0,6% | 70,5% |
| 10 | France | 1755 | 2706 | 3072 | 2,2% | 1,4% | 1,5% | 1,1% | 0,5% | 70,4% |

Zdroj: vlastní provedení. Data za roky 1992 a 2020 jsou převzata z World Economic Outlook Database International Monetary Fund. Jsou v paritě kupní síly, mezinárodních dolarech.

Prolongační rovnice 3 největších ekonomik světa byly uvedeny v subkapitole 4.1. Pro prolongaci všech ostatních zemí byla shledána jako nejvhodnější kvadratická časová produkční funkce s výjimkou Japonska, kde byla použita lineární funkce s velmi nízkým regresním koeficientem $b_1 = -0,000870421$. Regresní koeficienty kvadratických rovnic b_2 se pohybují mezi $-0,00229772$ a $-0,028621$. Prolongační funkce produktivity živé práce HDP/L jsou buď polynomy II. stupně, nebo jsou to polynomy I. stupně, tj. jsou lineární. Lineární jsou pro Brazílii, Kanadu, Francii, Německo a Rusko. Koeficient dopadu restriktivních opatření vyhlášených v důsledku epidemie Covid 19 byl diferencovaně uplatněn na rok 2020 podle prosincových odhadů. Tabulka 3 zohledňuje tyto dopady v absolutní výši HDP v roce 2020 a v indexu 2020/1992.

Prognóza respektuje také odhad poklesu globálního HDP v roce 2020, kde se odhaduje tempo růstu $-4,4\%$; vyspělých ekonomik $-5,8\%$; Euro zóny $-8,3\%$; G7 $6,0\%$; EU $-7,6\%$; ASEAN-5 $-3,405$ a Latinská Amerika $-8,1\%$.

Analytické a prognostické výsledky budou v této analýze charakterizovány změnou pořadí národních ekonomik podle vybraných doposud v této analýze používaných ukazatelů. Změny pořadí jsou uvedeny souhrnně v tabulce 4.

Tabulka 4: Pořadí deseti nejsilnějších ekonomik světa podle klíčových ukazatelů

| | | HDP (bilion \$) | | | | | HDP/L | L | i | |
|----|----------------|-----------------|------|------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| | | 1992 | 2020 | 2030 | 2020/1992 | 2030/2020 | 2030/1992 | 2030/1992 | 2030/1992 | |
| 1 | China | 5 | 1 | 1 | 13 | 3 | 1 | 1 | 6 | 3 |
| 2 | United States | 1 | 2 | 3 | 14 | 10 | 5 | 6 | 4 | 11 |
| 3 | India | 8 | 3 | 2 | 6 | 1 | 2 | 2 | 1 | 6 |
| 4 | Japan | 2 | 4 | 5 | 1 | 13 | 10 | 10 | 10 | 2 |
| 5 | Germany | 3 | 5 | 7 | 7 | 12 | 9 | 8 | 8 | 4 |
| 6 | Russia | 4 | 6 | 6 | 4 | 4 | 7 | 4 | 9 | 1 |
| 7 | Indonesia | 11 | 7 | 4 | 9 | 2 | 3 | 3 | 2 | 7 |
| 8 | Brazil | 9 | 8 | 8 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 13 |
| 9 | United Kingdom | 10 | 9 | 9 | 12 | 8 | 6 | 5 | 5 | 8 |
| 10 | France | 7 | 10 | 10 | 5 | 11 | 8 | 9 | 7 | 9 |

Zdroj: vlastní provedení dle tabulky 3

První 3 řádky tabulky byly již komentovány v subkapitole 4.1. Změny pořadí jednotlivých národních ekonomik mají dobrou vypovídací schopnost a jsou názorné, proto budou dále komentovány jen některé nejzajímavější poznatky a souvislosti.

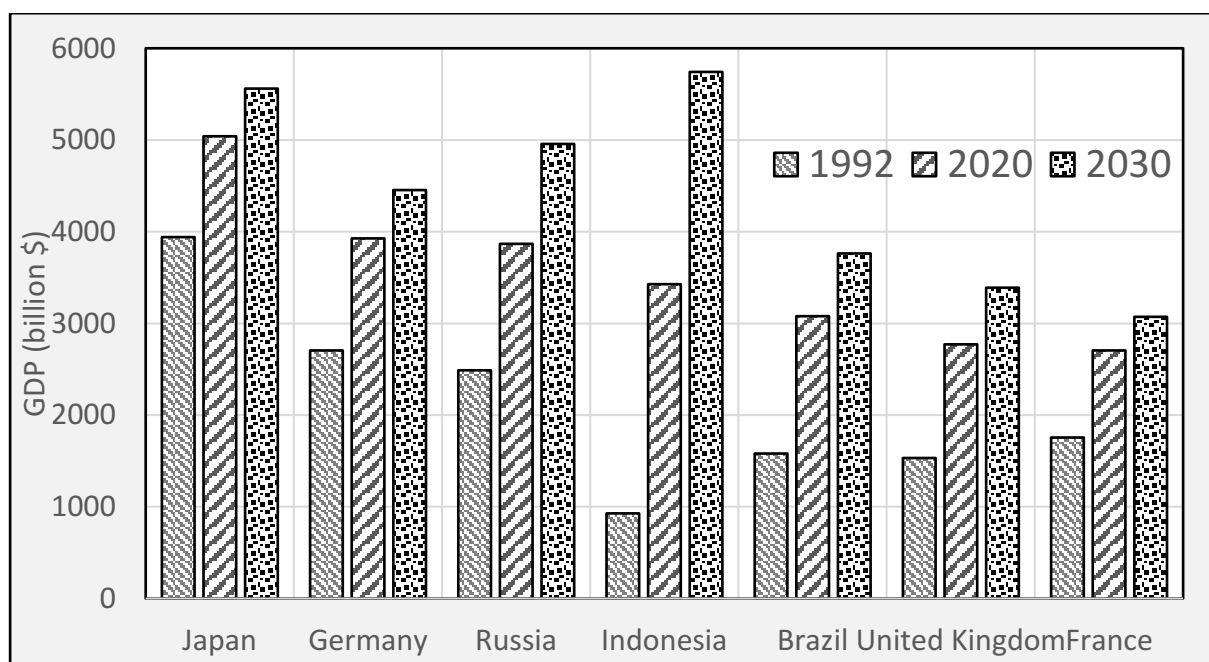
Za první 3 již dříve podrobně analyzované národní ekonomiky USA, Čína a Indie se v prognózovaném roce 2030 zařadila Indonésie, která byla v roce 1992 ještě na 11 místě. Páté je v prognózovaném roce 2030 Japonsko, pro které to ale znamená významnou ztrátu pozice, neboť bylo v roce 1992 ještě na 2. místě a v roce 2020 je na 4. místě. Japonsko se muselo věnovat odstraňování několika přírodních katastrof a také ztratilo některé své významné vývozní pozice. U Japonska je zřejmá i ztráta

pozice z hlediska tempa růstu *HDP*. Jestliže v roce 1992 bylo na 2. místě, tak v roce 2020 a prognózovaném roce 2030 je na 13. a 10. místě. Japonsko je na 10. místě i v tempu růstu obyvatel a tempu růstu produktivity živé práce *HDP/L*. O tom, že neztratilo svůj vnitřní potenciál, ale svědčí, že je na 2. místě v intenzitě. Uvedené skutečnosti jsou ovlivněny tím, že Japonsko mělo ve výchozím roce 1992 vysoké *HDP*, druhé největší na světě. Dá se říci, že Japonsko s předpokládanou stagnací počtu obyvatel žije z minulosti, avšak kvalitu vývoje si udržuje.

Následuje 6. Rusko, které si drží tuto pozici i v roce 2020. Rusko by mohlo zaregistrovat větší posun na vyšší pozice, avšak musí řešit následky čtených sankcí, které ho nutí do významné restrukturalizace ekonomiky, neboť se nemůže spoléhat jen na vývoz surovin. O tom, že Rusko restrukturalizuje a zkvalitňuje svou trajektorii vývoje, svědčí 1. místo i v intenzitě (vstup je opět pouze *L*), která je 97 %. Přes 90 % má ještě Německo Japonsko a Čína.

Za Rusko se zařadilo Německo, je 7., a ztrácí pozice podobně jako Japonsko, neboť v roce 1992 bylo ještě 3., v roce 2020 šlo o dvě místa níže na pozici 5. a do roku 2030 nejspíš ztratí další dvě pozice na místo 7. To je závažné. Je to způsobeno především řešením silné imigrantské vlny, výraznými ekonomickými restrikcemi i ztrátou konkurenceschopnosti v rámci Evropy i ztráty konkurenceschopnosti Evropy jako celku. Brazílie, Anglie a Francie si drží stabilně pozice na konci desítky. U Brazílie stojí za zmínku její tempo růstu počtu obyvatel v celém sledovaném období 2030/1992, které je 3. největší a představuje průměrný meziroční růst 1 %.

Obrázek 14: Vývoj *HDP* 4. až 10. země světa (1992; 2020; 2030)



Zdroj: vlastní provedení dle tabulky 3

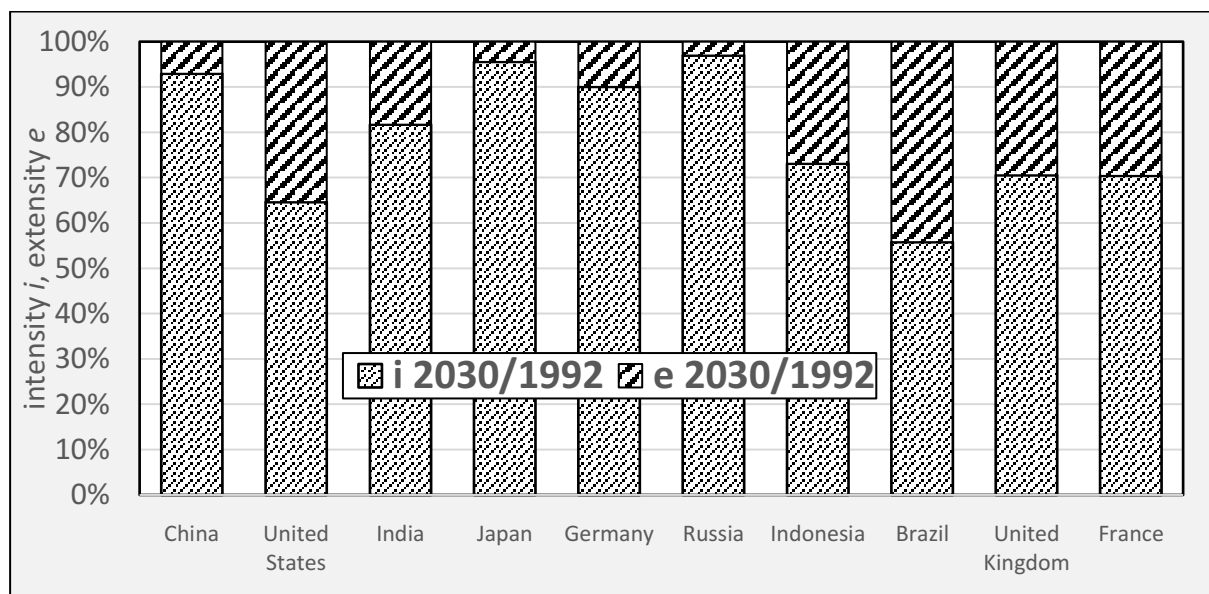
Obrázek 14 navazuje na obrázek 10, ilustruje totiž dosaženou výši *HDP* těch zemí první desítky, které nebyly na obrázku 10. Země jsou seřazeny podle prostředních

sloupců, tj. podle roku 2020. Z obrázku je velmi dobře vidět, že 1. a 3. sloupce jdou proti sobě a tak dobře dokumentují změnu pořadí těchto zemí. Z obrázku je zřejmá dominance dynamiky asijských zemí Indonésie, Ruska i Japonska.

Za pozornost stojí změny pořadí národních ekonomik podle jednofaktorových intenzit (*i*) za celé období 2030/1992. Tyto intenzity jsou pro všech 10 národních ekonomik zobrazeny na obrázku 15. Intenzity jsou představovány dolní světlejší částí sloupců, zatímco extenzity jsou doplňkem do 100 %.

Intenzity jsou všude nad 50 %, tj. jde vždy o převážně intenzivní vývoj. Na 1. místě je transformující se Rusko posilující zpracovatelský průmysl s intenzitou 97 %, což je téměř čistě intenzivní vývoj. Rusko těží také z kvalitní vědeckovýzkumné základny. Následuje Japonsko, Čína a Německo, které mají intenzitu rovněž vyšší než 90 %. Šestá Indie má 82 %. Poslední z analyzovaných deseti zemí je Brazílie, která má intenzitu 56 %.

Obrázek 15: Intenzita a extenzita deseti největších ekonomik světa 2030/1992



Zdroj: vlastní provedení dle tabulky 3

Opět se ukazuje, že intenzita vývoje je citlivý dynamický parametr, který přesvědčivě vypovídá o kvalitě vývoje národních ekonomik.

5 Druhy a typy agregací

Potřeba agregovat dílčí charakteristiky do souhrnného (používá se také kompozitního) ukazatele je neobyčejně obecná úloha, vyskytující se v řídicí praxi i při jakémkoliv rozhodování, mimořádně často a to dokonce aniž bychom si to uvědomovali. Je to způsobeno mimo jiné tím, že nezbytnou součástí každé hodnotící studie je analýza rozkládající daný problém na dílčí analytické části, které je nutno pro potřeby celku v rámci závěrů opět syntetizovat do výsledného shrnutí pro rozhodnutí. Jakákoliv rozhodnutí a optimalizace se bez těchto souhrnů (syntéz) neobejde. Mezi obecné problémy, které se neobejdou bez uspokojivého řešení úlohy souhrnných ukazatelů, patří např.: měření a řízení udržitelného vývoje, zjišťování souhrnných efektů ekonomiky, měření kvality života, měření inovační aktivity ekonomiky, strategická rozhodnutí při řízení obchodní společnosti apod.

Proč je tento problém zahrnut do monografie o produkčních funkcích? Každá více faktorová produkční funkce řeší nějakým způsobem přímou či nepřímou agregaci dílčích výrobních faktorů. V nejjednodušším případě jsou výrobní faktory nezávislé a přitom je lze vzájemně substituovat. Agregáčnickými funkcemi jsou nejčastěji vážené aritmetické agregace. Některé produkční funkce využívají váženou geometrickou agregaci. Významná produkční funkce s váženou multiplikativní vazbou je Cobb-Douglasova produkční funkce. Pokud se v produkční funkci vyskytuje explicitně efektivnost nebo např. souhrnná produktivita faktorů, téměř vždy se násobí.

V některých případech konstruujeme datové soubory systematicky tak abychom co nejlépe pokryly relevantní oblast, jindy se snažíme vytěžit z již existujících databází například časových řad dílčích ukazatelů souhrnné řešení problému. Proto ekonomický výzkum stále častěji využívá jak souhrnné ukazatele, tak více faktorové produkční funkce.

Rozsáhlá škála metod používaných při tvorbě kompozitních (souhrnných ukazatelů) dnes zahrnuje nejen přímé agregáčnické techniky, ale také prostředky očišťování údajů, jejich úprav, transformací a následného variantního statistického zpracování včetně kontroly citlivosti získaných výsledků a různých forem jejich prezentace. Problematika produkčních funkcí či souhrnných ukazatelů se i díky tomu začíná více prolínat s matematickým modelováním. V obou případech jde o to problematiku účelně zjednodušit a přitom nezkrslit. Dobře navržená produkční funkce či souhrnný ukazatel umí shrnout dílčí trendy i protichůdné vývoje jednotlivých dílčích složek a faktorů. Kvalita řešení je závislá zejména na přesném vymezení úlohy, dobré definici měřených charakteristik a dostatečné znalosti podstatných vazeb dané problematiky, která se promítne do navrženého algoritmu konstrukce produkční funkce či souhrnného ukazatele, který je pak validním odrazem zkoumané reality. Tyto úlohy jsou vlastní nejen řízení a ekonomice, ale prakticky každé vědní disciplíně včetně biologie, kybernetiky, automatizace, umělé inteligence apod.

Analýza diagnostických, hodnotících a řídicích algoritmů vychází tak či onak z nějaké vážené aritmetické agregace. Problém je v tom, že dále vymezený druh a typ agregace nemůže být libovolný, nýbrž měl by odpovídat podstatě agregovaných vztahů. Proto, abychom mohli provést toto přiřazení, musíme mít přehled o tom, jaké agregáčnické

funkce existují a také jaké mají vlastnosti. To vše nejen ve statické, nýbrž i v dynamické úloze. Tato subkapitola obsahuje základními způsoby sdružování neboli agregace výrobních faktorů nebo dílčích ukazatelů a to především z hlediska odpovídajícího matematického aparátu. K tomu, abychom sdružili nebo sloučili dílčí ukazatele, je nezbytné nalézt realitě odpovídající agregační aparát, který není libovolný, neboť musí vycházet z věcné podstaty jevů, které výrobní faktory nebo ukazatele zobrazují. Mohou mít nejrůznější podobu, nemusí být nelineární a mohou být různým způsobem nesymetrické. Mimo jiné je nutno respektovat povahu dílčích ukazatelů, které mohou mít za úkol, zachytit různé kvantitativní ale i kvalitativní jevy a mohou mít také různé jednotky, mohou mít statickou i dynamickou povahu a může jít o veličiny deterministické i stochastické apod.

V obecné podobě lze za agregační funkci považovat téměř každý matematický algebraický výraz, v němž se vyskytuje více proměnných. V této subkapitole se budeme zabývat jen základními agregačními funkcemi umožňujícími agregaci více než dvou dílčích charakteristik.

5.1 Druhy a typy agregací

Vymezení základních pojmů

Základní pojmy budou vymezeny na příkladu souhrnných ukazatelů. Obsah pojmu **souhrnný ukazatel** vyplývá z následujícího srovnání s obecnějšími na straně jedné a konkrétnějšími na straně druhé. Obecnější pojem je ukazatel. **Ukazatel je** kvantitativní míra naplnění nějakého znaku, který lze konkretizovat ve dvou směrech, a to podle toho, kolik stránek daného jevu daný ukazatel zahrnuje, a podle toho, vztahuje-li se daný ukazatel ve statické nebo dynamické úloze. Ukazatel v sobě zahrnuje buď více, nebo méně stránek daného jevu. Právě podle tohoto můžeme rozlišovat, zda jde o **dílčí** ukazatel zahrnující jen jednu stránku daného jevu nebo **souhrnný** ukazatel, zahrnující více než jednu stránku nebo dokonce všechny. Podle druhého hlediska rozlišujeme ukazatele **úrovně**, vztahující se ke statické úloze nebo ukazatele **vývoje** vztahující se k **dynamické** úloze. Kombinací obou hledisek získáme pojmy **dílčí ukazatel úrovně**, **dílčí ukazatel vývoje**, **souhrnný ukazatel úrovně**, **souhrnný ukazatel vývoje**.

Definice

Souhrnný ukazatel zahrnuje více než jednu nebo dokonce všechny stránky daného jevu. **Dílčí** ukazatel zahrnuje jen jednu stránku daného jevu.

Statická úloha je dána výhradně ukazateli úrovně, ty jsou vztaženy k danému okamžiku (stavy) nebo i intervalu (toky)

Dynamická úloha je dána výhradně ukazateli vývoje tj. absolutními přírůstky, indexy a tempy růstu.

Cílem této analýzy je:

- Vymežit základní pojmy úlohy agregace dílčích ukazatelů do ukazatelů souhrnných.
- Definice základních druhů a typů agregačních funkcí.
- Definice základních agregačních funkcí.
- Objasnění vztahů mezi statickou a dynamickou úlohou.
- Objasnit na příkladech odvození agregačních funkcí dynamické úlohy ze známé agregační funkce statické úlohy.

Při konstrukci obecných vztahů souhrnných ukazatelů se vychází z těchto poznatků:

- Při konstrukci souhrnných ukazatelů je nutno rozlišovat statickou a dynamickou úlohu. Ukazatele statické úlohy mají povahu stavů nebo toků a přísluší určitému časovému okamžiku u úrovní nebo i časovému úseku u toků. Dynamickou úlohu tvoří absolutní přírůstky, tempa růstu a indexy. Ty nazýváme **dynamické charakteristiky**.
- Ve statické i dynamické úloze je shodný **základní metodický princip** konstrukce **souhrnných** ukazatelů spočívající v tom, že jsou vždy **agregací dílčích** ukazatelů. Z mnoha existujících způsobů agregace jsou jen ty přípustné, které dávají dostatečný soulad s realitou. Z přípustných je pak nevhodnější ta, která má nejlepší opodstatnění z hlediska velmi dobré interpretace a vynikajícího souladu s realitou. Znalost věcné podstaty agregovaných jevů je pro stanovení korektní objektivně zdůvodněné agregační funkce nezbytná.

V této subkapitole budeme rozlišovat **tři** nejpoužívanější (jsou i další, například kvadratická apod.) **druhy agregací:**

- **aritmetická**
- **harmonická**
- **geometrická**

a dva druhy agregaci na bázi

- **prostého či váženého průměru**
- **prostého či váženého souhrnu** (např. součtu, součinu, součtu převrácených hodnot).

Pro odvození **korektní objektivně zdůvodněné** agregační funkce v dynamické úloze můžeme využít její znalost v úloze statické a znalost vztahů mezi statickou a dynamickou úlohou. Obdobně znalost korektní objektivně zdůvodněné agregační funkce v dynamické úloze obvykle dovoluje její odvození v úloze statické opět pomocí znalostí vztahů mezi statickou a dynamickou úlohou.

Kritériem správnosti tohoto odvození bude, jak se dozvíme později rovnost dosažených výsledků při postupu odpovídajícímu přímému a nepřímému výpočtu.

Přímý výpočet je takový, kde dynamickou charakteristiku souhrnného ukazatele (absolutní přírůstek, index, nebo tempo změny) vypočítáme přímo ze statických souhrnných ukazatelů. **Nepřímý výpočet** je takový, kde dynamickou charakteristiku souhrnného ukazatele vypočítáme jako agregaci dílčích dynamických charakteristik ukazatelů. Tato cesta se často jeví jako komplikovanější, má ale tu výhodu, že je často dobrým základem pro stanovení podílů vlivů dílčích ukazatelů nebo tzv. příspěvků.

V této subkapitole budou používány následující symboly (na konci popisu je uveden definiční obor):

| | |
|----------|--|
| S | souhrnný (kompozitní) ukazatel úrovně; $\langle 0, \infty \rangle$ |
| A | dílčí ukazatel úrovně; $\langle 0, \infty \rangle$ |
| i | dolní index pro označení druhu agregace $i \in \{\alpha, h, g\}$ α aritmetická agregace, h harmonická agregace, g geometrická agregace |
| α | proměnná určující typ agregace ve statické úloze; $\langle 0, \infty \rangle$ |
| β | proměnná určující typ agregace v dynamické úloze; $\langle 0, \infty \rangle$ |
| j, k | dolní index představující pořadové číslo dílčího ukazatele $j, k = 1, 2, \dots, n$ |
| n | počet dílčích ukazatelů; <i>číslo celé, konečné</i> |
| t | časový okamžik; <i>číslo celé, konečné</i> |
| τ | výchozí časový okamžik; <i>číslo celé, konečné</i> |
| T | konečný časový okamžik; <i>číslo celé, konečné</i> |
| $G(\)$ | tempo růstu; $\langle -1, \infty \rangle$ |
| $I(\)$ | index; $\langle 0, \infty \rangle$ |
| w | množina vah úrovně i vývoje $w \in \{v, u\}$ |
| γ | množina proměnných určujících typ agregace úrovně i vývoje $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$ |

Na základě uvedených vymezení s využitím uvedeného značení je možno nadefinovat základní obecné agregační funkce pro statickou i dynamickou úlohu. V každé z těchto úloh je možno definovat vztahy pro každý druh agregace tj. aritmetickou, geometrickou a harmonickou.

Každá z agregací využívá jako základní princip některou primární matematickou operaci.

- **aritmetická** agregace je založena na **sčítání**
- **geometrická** agregace je založena na **násobení**
- **harmonická** agregace je založena na **převrácené hodnotě součtu převrácených hodnot**

Definice

Matematická funkce, která slouží ke slučování dílčích ukazatelů do souhrnného, se označuje, jako **agregační funkce**.

Aritmetickou agregaci můžeme považovat za primární. Ostatní jsou od ní odvozené tak, že nějakým vhodným způsobem transformujeme souřadnice, pak provedeme aritmetický průměr a výsledek převedeme inverzní operací zpět (dalo by se říci, „odtransformujeme“). U geometrické agregace je touto transformační funkcí logaritmus, u harmonické převrácená hodnota. Touto cestou by bylo možno nadefinovat velké množství agregací případně průměrů např. kosinový, logaritmický, kvadratický průměr apod.

Všechny výrazy jsou odvozeny jako vážené s tím, že při volbě všech vah v daném výrazu rovno nule přechází výraz na prostý tj. nevážený. Rovněž bude nutno zvažovat, čemu se rovná součet vah. Parametr α ve statické úloze případně β v dynamické úloze, bude sloužit k určování dvou typů agrese podle toho, jakých hodnot budou nabývat a v jaké vazbě budou na případný součet vah. Mohou se totiž rovnat 1 nebo součtu vah apod.

V dynamické úloze jsou vztahy definovány zcela analogicky jako v úloze statické, a to zvlášť pro tempa růstu $G()$ a indexy $I()$.

Všechny dále uvedené druhy a typy agregací vznikly na základě zobecnění konkrétních návrhů agregačních vztahů např. pro výpočet tzv. souhrnné (syntetické) efektivity.

Obecné agregační funkce

- statická úloha
 - aritmetická agregace⁴⁸

$$S_{at} = \frac{1}{\alpha_t} \sum_{j=1}^n v_{jt} A_{jt} \quad (74)$$

- geometrická agregace⁴⁹

$$S_{gt} = \left[\prod_{j=1}^n A_{jt}^{v_{jt}} \right]^{1/\alpha_t} \quad (75)$$

- harmonická agregace⁵⁰

⁴⁸ Aritmetickou agregaci použily při definování syntetického ukazatele úrovně efektivity (statická úloha) např. (Adamov, 1973), (Čečeleva, 1975), specifikaci podmínek a převod obecných vzorců syntetických ukazatelů efektivity na konkrétní vzorec navrhované těmito, ale i všemi ostatními autory, viz (Pastrňák, 1978).

⁴⁹ Geometrickou agregaci ve statické úloze použili např. (Kutta, 1975), (Vejmola, 1972).

⁵⁰ Harmonickou agregaci ve statické úloze použili např. (Peltramová, Spěváček, 1970), (Toms, 1973), (Hájek, 1973).

$$S_{ht} = \frac{\alpha_t}{\sum_{j=1}^n \frac{v_{jt}}{A_{jt}}} \quad (76)$$

Pro součet vah platí
$$v_t = \sum_{j=1}^n v_{jt} \quad (77)$$

Pro proměnnou α_t mohou nastat ve vzorcích (74) až (76) tyto 3 významné případy:

- α_t i součet vah v_t jsou rovny 1; ($\alpha_t = v_t = 1$)⁵¹
- α_t je roven součtu vah v_t přičemž je různý od 1; ($\alpha_t = v_t \neq 1$)
- α_t je roven 1, zatímco součet součtu vah v_t nikoliv; ($\alpha_t = 1, v_t \neq 1 \rightarrow \alpha_t \neq v_t$)⁵²

Analogie pro dynamickou úlohu spočívá v tom, že místo symbolu pro souhrnný ukazatel S se zavádí jeho dynamická charakteristika tempa růstu $G(S)$, nebo index $I(S)$, místo statické váhy v_t se zavádí dynamická váha u_t a místo statického parametru α_t pro určení typu agregace se zavádí dynamický parametru pro určení typu agregace β_t .

Tyto operace se realizují jak pro tempa růstu, tak pro indexy

- dynamická úloha
 - aritmetická agregace⁵³

$$G_a(S) = \frac{1}{\beta_t} \sum_{j=1}^n u_{jt} G(a_{jt}) \quad (78)$$

$$I_a(S) = \frac{1}{\beta_t} \sum_{j=1}^n u_{jt} I(A_{jt}) \quad (79)$$

- geometrická agregace⁵⁴

$$G_g(S) = \left[\prod_{j=1}^n G^{u_{jt}}(A_{jt}) \right]^{1/\beta_t} \quad (80)^{55}$$

⁵¹ Takovým způsobem je definován syntetický ukazatel úrovně efektivnosti v (Kutta, 1975).

⁵² Těchto hodnot nabývají parametr α_t a součet vah při řešení statické úlohy nejčastěji; viz např. (Adamov, 1973), (Čečeleva, 1975), (Peltramová, Spěvák, 1970), (Toms, 1973), (Hájek, 1973), (Vejmola, 1972).

⁵³ Aritmetické agregace relativních přírůstků dílčích ukazatelů efektivnosti při definici syntetického ukazatele vývoje efektivnosti použili např. (Toms, 1973), (Hájek, 1973), (Brabec, 1978).

⁵⁴ Geometrická agregace indexů růstu dílčích ukazatelů efektivnosti použili např. (Kvaša, 1974), (Brabec, 1978).

⁵⁵ Vztah (80) má smysl pro $G(A_j) > 0$.

$$I_g(S) = \left[\prod_{j=1}^n I^{u_{jt}}(A_j) \right]^{1/\beta_t} \quad (81)$$

- harmonická agregace⁵⁶

$$G_h(S) = \frac{\beta_t}{\sum_{j=1}^n \frac{u_{jt}}{G(A_j)}} \quad (82)^{57}$$

$$I_h(S) = \frac{\beta_t}{\sum_{j=1}^n \frac{u_{jt}}{I(A_j)}} \quad (83)$$

Pro součet vah platí

$$u_t = \sum_{j=1}^n u_{jt} \quad (84)$$

Pro proměnnou β_t mohou nastat ve vzorcích (81) až (83) tyto 3 významné případy:

- β_t i součet vah jsou rovny 1; ($\beta_t = u_t = 1$)⁵⁸
- β_t je roven součtu vah u_t přičemž je různý od 1; ($\beta_t = u_t \neq 1$)⁵⁹
- β_t je roven 1, zatímco součet součtu vah u_t nikoliv; ($\beta_t = 1, u_t \neq 1 \rightarrow \beta_t \neq u_t$)⁶⁰

Rozlišení druhů a typů agregací:

Doposud definovaným třem druhům agregací odpovídají následující vzorce:

- aritmetická agregace, vztahy (74), (78) a (79)
- geometrická agregace, vztahy (75), (80) a (81)
- harmonická agregace, vztahy (76), (82) a (83)

Typy agregací jsou 2 a definují se takto:

- pro 1. typ platí: $\gamma_t = w_t$, čili
 - ❖ ve vzorcích (74) až (76) ve statické úloze je $\alpha_t = w_t$
 - ❖ ve vzorcích (78) až (83) ve dynamické úloze je $\beta_t = u_t$
- pro 2. typ platí: $\gamma_t \neq w_t$, $\gamma_t = 1$ čili

⁵⁶ Harmonickou agregaci indexů růstu dílčích ukazatelů efektivity použil např. (Kvaša, 1973).

⁵⁷ Vztah (82) má smysl pro $G(A_j) \neq 0$ a pro jmenovatel různý od 0.

⁵⁸ Takto definují syntetický ukazatel vývoje efektivity např. (Toms, 1973), (Hájek, 1973), (Brabec, 1978), (Pastrňák, 1978).

⁵⁹ Viz např. (Kvaša, 1974).

⁶⁰ Tamtéž.

- ❖ ve vzorcích (74) až (76) ve statické úloze je $\alpha_t \neq v_t, \alpha_t = 1$
- ❖ ve vzorcích (78) až (83) ve dynamické úloze je $\beta_t \neq u_t, \beta_t = 1$

Definice

Rozlišujeme **tři základní druhy** agregačních funkcí: **aritmetickou, harmonickou a geometrickou** a **dva typy** jeden vychází z konstrukce **průměrů** a druhý z **prosté**

5.2 Vazby statické a dynamické úlohy

Výše uvedené agregační vztahy lze rovněž využít k řešení úlohy vyhledání vhodného typu agregace a exaktního stanovení vah dílčích ukazatelů v dynamické úloze ze známé agregační úlohy v úloze statické.

Zde bude odvozen takový vztah (tzv. nepřímý výpočet) pro případ indexu aritmetické a geometrické agregace. Další varianty úlohy již budou představovat neřešené úlohy, které lze řešit analogicky.

Připomeňme, že index souhrnného ukazatele S stejně jako dílčího ukazatele A se spočítá jako podíl odpovídajících veličin v konečném roce T a výchozím roce τ . Definiční výrazy dynamických charakteristik současně určují vztahy mezi statickou a dynamickou úlohou. Pro indexy platí

$$I(S) = \frac{S_T}{S_\tau} \quad \text{a} \quad I(A) = \frac{A_T}{A_\tau} \quad (85)$$

PŘÍKLAD 1 Aritmetická agregace indexů

Odvoďte pro dynamickou úlohu, a to pro indexy odpovídající agregaci indexů dílčích ukazatelů a příslušné dynamické váhy ze známé vážené aritmetické agregace dílčích ukazatelů ve statické úloze se součtem vah rovným n . Druh agregace je aritmetický, typ 1 (na bázi průměru).

Víme tedy, že ve statické úloze platí výraz (74) v němž $\alpha_t = v_t = n \neq 1$ a tudíž jde o vážený aritmetický průměr

$$S_{at} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_{jt} A_{jt} \quad (86)$$

Nyní tento výraz dosadíme do výrazu pro index souhrnného ukazatele a tento výraz upravíme

$$I(S_a) = \frac{E_{aT}}{E_{a\tau}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_{jT} A_{jT}}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_{k\tau} A_{k\tau}} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{v_j A_{jT}}{\sum_{k=1}^n v_k A_{k\tau}} \frac{A_{jT}}{A_{j\tau}} \right] \quad (87)$$

Poslední zlomek v hranaté závorce představuje index dílčího ukazatele. Předposlední podíl má interpretaci dynamické váhy pro indexy, která je daná statickou vahou výchozího okamžiku τ .

$$u_{aj\tau} = \frac{v_j A_{j\tau}}{\sum_{k=1}^n v_k A_{k\tau}} \quad (88)$$

Dosadíme-li za podíl dílčích ukazatelů jejich index a za dynamickou váhu právě uvedený výraz. Získáme tak výraz dynamické úlohy pro aritmetickou agregaci indexů pro $\beta_t=1$.

$$I_a(S) = \sum_{j=1}^n u_{jt} I(A_{jt}) \quad (89)$$

Tímto způsobem jsme odvodily velmi zajímavý poznatek. Pokud je souhrnný ukazatel ve statické úloze definován jako vážená aritmetická agregace 1. i 2. typu platí pro nepřímý výpočet indexu souhrnného ukazatele rovněž z indexů dílčích ukazatelů rovněž vážená aritmetická agregace s vahami danými váženým podílem dílčího ukazatele vůči souhrnnému ukazateli u_{ajt} ve výchozím roce.

PŘÍKLAD 2 Geometrická agregace indexů

Odvoďte v rámci dynamické úlohy odpovídající agregaci indexů dílčích ukazatelů a příslušné dynamické váhy ze známé vážené geometrické agregace dílčích ukazatelů ve statické úloze, v níž je součtem vah 1. Druh agregace je geometrický, typ 1 (na bázi průměru). Výchozí výraz je tentokrát (76)

$$S_{gt} = \left[\prod_{j=1}^n A_{jt}^{v_j} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (89)$$

Řešení spočívá v tom, že tento výraz dosadíme pro výchozí okamžik τ i pro konečný okamžik T do výrazu pro index souhrnného ukazatele (85) a tento výraz upravíme

$$I(S_a) = \frac{S_{aT}}{S_{a\tau}} = \left[\prod_{j=1}^n \left(\frac{A_{jT}}{A_{j\tau}} \right)^{v_j} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (90)$$

Podíl dílčích ukazatelů je podle výrazu (85) index dílčího ukazatele $I(A)$. Po této substituci získáme výraz, který odpovídá **dynamické** agregaci indexů a má následující tvar:

$$I_g(S_g) = \left[\prod_{j=1}^n I^{u_j}(A_j) \right] \quad (91)$$

Jde o specifický vzorec pro $\beta_t=1$, kde dynamická váha je daná výrazem

$$u_{gj} = \frac{v_j}{\alpha} \quad (92)$$

pro $\alpha = 1$ je

$$u_{gj} = v_j \quad (93)$$

pro $\alpha = v$ platí

$$u_{gj} = \frac{v_j}{\sum_{k=1}^n v_k} \quad (94)$$

Tímto způsobem jsme odvodily velmi zajímavý poznatek. Pokud je souhrnný ukazatel ve statické úloze definován jako vážená geometrická agregace 1. i 2. typu platí pro nepřímý výpočet indexu souhrnného ukazatele indexů dílčích ukazatelů také vážená geometrická agregace s vahami shodnými ve statické i dynamické úloze neboť jsou nezávislé na čase. Jejich konkrétní tvar je pak závislý na typu úlohy. Potvrdili jsme tak nejen, že známá agregační funkce statické úlohy určuje agregaci v úloze dynamické, nýbrž jsme našli i způsob jejího odvození i její konkrétní tvar včetně definice dynamických vah.

Pro harmonickou úlohu je možno rovněž provést obdobné odvození, které představuje neřešený úkol. Některé dynamické agregace platí jen přibližně, respektive za určitých podmínek např. malých temp změny. Takové dynamické agregace je nutno používat jen velmi opatrně.

SHRNUTÍ

- **Souhrnný** ukazatel zahrnuje více než jednu nebo dokonce všechny stránky daného jevu. **Dílčí** ukazatel zahrnuje jen jednu stránku daného jevu.
- **Statická úloha** je dána výhradně ukazateli úrovně, ty jsou vztaženy k danému okamžiku (stavy) nebo i intervalu (toky)
- **Dynamická úloha** je dána výhradně ukazateli vývoje tj. absolutními přírůstky, indexy a tempy růstu.
- Matematická funkce, která dovoluje slučovat dílčí ukazatele do souhrnného, se označuje jako **agregační funkce**.
- Rozlišujeme **tři základní druhy** agregačních funkcí: **aritmetickou**, **harmonickou** a **geometrickou** a dva typy jeden vychází z konstrukce průměrů a druhý z prosté agregace.
- Definiční výrazy dynamických charakteristik určují **vztahy mezi statickou a dynamickou úlohou**.
- **Přímý výpočet** je takový, kde dynamickou charakteristiku souhrnného ukazatele (absolutní přírůstek, index, nebo tempo změny) vypočítáme přímo ze statických souhrnných ukazatelů.
- **Nepřímý výpočet** je takový, kde dynamickou charakteristiku souhrnného ukazatele vypočítáme jako agregaci dílčích dynamických charakteristik ukazatelů.
- Díky vztahům mezi statickou a dynamickou úlohou je možno často **vypočítat agregační funkci** a její váhy v úloze dynamické, pokud známe tuto agregaci v úloze statické a často i naopak ze známé agregační funkce v úloze dynamické můžeme spočítat jaká je korektní agregační funkce případně její váhy v úloze statické.

6 Příklad využití multiplikativní agregace

Výrobní faktory nebo ukazatele lze v zásadě členit podle toho, kolik stránek daného jevu ten který výrobní faktor nebo ukazatel zachycuje a také podle toho vztahuje-li se ke statické nebo dynamické úloze.

Podle prvního hlediska rozlišujeme *dílčí výrobní faktory* či *ukazatele* zachycující pouze jednu stránku daného jevu a *syntetické (kompozitní) ukazatele* zachycující více než jednu stránku daného jevu. Syntetičtí (kompozitní) ukazatelé mohou vytvářet hierarchické struktury. Na vrcholu této struktury je pak ukazatel zahrnující všechny stránky daného jevu.

Podle druhého kritéria rozlišujeme *ukazatele úrovně*, které se vztahují ke statické úloze a *ukazatele vývoje*, které se vztahují k dynamické úloze. Ukazatele úrovně mohou nabývat v čase (např. podle dnů, měsíců, let apod.) různých hodnot. Vznikají tak časové řady ukazatelů úrovně představující statickou úlohu. Dynamická úloha se zabývá změnami za sledované časové úseky. Pro dynamickou úlohu používáme téměř výhradně tři ukazatele absolutní přírůstek ΔA , relativní přírůstek $G(A)$ a index (koeficient) změny $I(A) = G(A) + 1$

Kombinací obou hledisek dostáváme konkretizaci na pojmy *dílčí ukazatel úrovně*, *dílčí ukazatel vývoje*, *syntetický (kompozitní) ukazatel úrovně* a *syntetický (kompozitní) ukazatel vývoje*.

Smyslem této kapitoly ale není pojednat o agregacích obecně, nýbrž představit využití speciálních vlastností vybrané agregace vhodné pro agregaci určitých konkrétních výrobních faktorů nebo dílčích charakteristik. Jde o ukazatele tzv. bezporuchovosti. Fungování firmy má totiž mnohé analogie s fungováním živých organizmů např. člověka. Člověk je velmi komplikovaný systém, který pozůstává mimo jiné z celé řady systémových orgánů či systémů. Selhání každého z nich představuje pro člověka smrt, tj. fatální selhání a to navzdory i jinak bezporuchového fungování ostatních orgánů. Obrazně řečeno: *Jinak byl úplně zdravý, jen to srdíčko mu selhalo*. Z uvedeného plyne, že výběr agregace musí respektovat toto sériové (za sebou jako články řetězu) řazení systémových orgánů. Stejně tak podnik má některé systémy, bez kterých nemůže fungovat, byť by jiné byly funkční ba dokonce optimální. Mezi takové systémy patří např. bezpečnost práce, financování (úvěrování), zabezpečení kritické poptávky, odpadové hospodářství, utajování klíčových informací nebo speciálních technologií (např. recept na Becherovku apod.).

Vzhledem k tomu, že účelem této subkapitoly je hlavně představit využití speciálních vlastností geometrické agregace, bude pozornost soustředěna hlavně na vlastnosti této agregace.

6.1 Produkční funkce s geometrickou agregací

Většina syntetických úloh včetně produkčních funkcí vede na váženou aritmetickou agregaci proto, že je nejpřirozenější a často používaná. Obvykle to stačí i jako přibližné řešení. Při řešení závažnějších společenských problémů je ale nezbytné hledat hlubší podstatu agregovaných vztahů. Pro správnou volbu agregačních funkcí musíme mít znalost o tom, jaké agregační funkce existují a také jaké mají vlastnosti. To vše jak ve statické, tak i v dynamické úloze včetně vzájemných souvislostí. Základní druhy a typy agregací jsou obsaženy v kapitole 5.

Geometrická agregace využívá princip násobení dílčích charakteristik. To znamená, že stačí, když jediná z nich nabude hodnoty 0 a máme zajištěno, že nulovou hodnotu nabude i příslušný kompozitní ukazatel. Právě to je potřebné při měření bezporuchovosti systémů se sériovým řazením dílčích oblastí (částí, subsystémů), jejichž selhání má fatální dopad na celý systém.

Pro geometrickou agregaci je výhodné a názorné, když dílčí ukazatele nabývají hodnot od 0 do 1 (nebo od 0 % do 100 %). Hodnotu 0 nabývá, pokud daný subsystém selže a 1, když je ve svém optimu. Vzhledem k tomu, že běžné ukazatele např. znečištění vody, zadluženosti apod. takových hodnot nenabývají je nutno je nejdříve nanormovat, tj. transformovat do intervalu $\langle 0; 1 \rangle$.

Protože některý ukazatel vykazuje pozitivní růst a jiný zase pozitivní pokles, je pro toto normování potřeba vygenerovat dva vztahy.

a) Pro statickou úlohu.

Pro optimálně růstové ukazatele:

$$A_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{dj}}{a_{hj} - a_{dj}} \quad (95)$$

Pro optimálně poklesové ukazatele:

$$A_{ij} = 1 - \frac{a_{ij} - a_{dj}}{a_{hj} - a_{dj}} \quad (96)$$

A ...je normovaný dílčí ukazatel

a ...je původní dílčí ukazatel

i ...je index kompozitního ukazatele

j ...je index dílčího ukazatele, kterých je **m**

d ...je dolní mez

h ...je horní mez

Vztah pro výpočet i-tého kompozitního ukazatele jako geometrický průměr

$$A_i = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m A_{ji}} \quad (97)$$

Podíl vlivu dílčího ukazatele (v %)

$$p(A_{ij}) = \frac{\ln(1 - A_{ij})}{\sum_{j=1}^m \ln(1 - A_{ij})} \quad (98)$$

b) Pro dynamickou úlohu.

Pro optimálně růstové ukazatele:

$$I_i(A_j) = \frac{A_{ij}}{A_{i-1j}} \quad (99)$$

Pro optimálně poklesové ukazatele:

$$I_i(A) = \frac{A_i}{A_{i-1}} \quad (100)$$

$I(\mathbf{A})$... je index normovaného dílčího ukazatele

i ... je index kompozitního ukazatele

j ... je index dílčího ukazatele, kterých je m

Vztah pro výpočet i -tého kompozitního ukazatele jako geometrický průměr

$$I(A_i) = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m I(A_{ji})} \quad (101)$$

Podíl vlivu dílčího ukazatele (v %)

$$p(I_i(A_j)) = \frac{\ln|I_i(A_j)|}{\sum_{j=1}^m \ln|I_i(A_j)|} \quad (102)$$

Pro výběr dílčích ukazatelů byla stanovena tato kritéria:

- Informační pokrytí podmínek udržitelného růstu
- Dobrá věcná interpretace
- Efektivní měřitelnost
- Časové řady, historie
- Mezinárodní dostupnost
- Validita (platnost)
- Reliabilita (bezchybnost, přesnost)
- Existence kritické meze

6.2 Příklady využití multiplikativní agregace

Jako ilustrativní příklad je zde uveden výpočet environmentálního zdraví ekonomiky.

Příklad 1: *Environmentální zdraví ekonomiky*

Máme k dispozici 12 environmentálních údajů v podobě desetiletých časových řad týkajících se České republiky. Naším úkolem je tyto údaje agregovat vhodným způsobem do souhrnného (kompozitního) ukazatele environmentálního zdraví za všechny ukazatele v každém roce i za celé období a ještě za první a druhou polovinu sledovaného časového období. V prvním kroku musíme zajistit slučitelnost výchozích údajů, které jsou měřeny v různých jednotkách a mají různý význam. Výchozí údaje, jejichž zdrojem bylo výhradně Ministerstvo životního prostředí, jsou soustředěny do první části tabulky 5, která v návazných částech obsahuje veškeré propočty.

Normováním původních veličin se zajistí jejich agregovatelnost. Odstraní se tak problém velmi různých veličin (měřených navíc v různých jednotkách) a odstraní se i problém různého směřování, neboť u některých veličin je pozitivní růst (podbarveno světle šedou) u jiných pokles (podbarveno tmavší šedou).

Pro normování bude použita ta skutečnost, že každá z uvedených veličin má svou kritickou mez při, které se systém zhroutl (tyto kritické meze jsou v tabulce 5 v řádcích dolní mez a horní mez). U pozitivně rostoucích veličin je kritická dolní mez, zatímco u pozitivně klesajících je kritická horní mez. Vždy existuje i druhá mez, která dovolí určit např. v %, kde se mezi oběma mezemi nacházíme, neboli jednoduše jak daleko jsme od kritické meze. Výpočet normované veličiny provedeme tak, že od původní veličiny odečteme dolní mez a dělíme rozdílem horní a dolní meze. U dílčích ukazatelů pozitivně klesajících ještě takto spočítanou velikost odečteme od 1, čímž zajistíme směrovou jednotnost ukazatelů. Po vynásobení 100 získáme plně agregovatelné údaje uvedené v dolní části tabulky 5. Veličiny jsou normovány do intervalu 0 až 100 %.

Vzhledem k tomu, že jde o statickou úlohu, lze uvažovat o aritmetické, geometrické nebo harmonické agregaci dílčích charakteristik. Pro výběr vhodného druhu agregace budou využity již výše zmíněné požadavky. Dosažení kritické hodnoty kteréhokoliv dílčího ukazatele se musí projevit v nulové hodnotě souhrnného ukazatele. Tuto podmínku splňuje jen geometrická agregace. Protože díky normování nemusíme ukazatele vážit, budou všechny váhy rovny 1. Součet vah pak bude rovný počtu dílčích ukazatelů. Půjde tedy o případ ($\alpha_t = v_t = n \neq 1$)⁶¹. Použijeme proto vzorec na prostý geometrický průměr.

Velikosti souhrnných ukazatelů za jednotlivé roky jsou spočteny jako geometrický průměr ve světle modrém sloupci kompozit. Je zřejmé, že zdraví systému roste sice nepravidelně ale stále. Méně příznivé je to, že jen lehce překračuje třetinu, což je dlouhodobě těžko udržitelná situace. Údaje za pětileté období lze získat rovněž jako geometrický průměr za odpovídající počet let. Stejně tak za celé desetileté období (údaj za rok 1995 v tomto případě nepotřebujeme). Vidíme, že environmentální zdraví systému činilo v prvních 5 letech o málo víc než 25 % a vzrostl v dalších pěti letech na

⁶¹ Viz druhy a typy agregací v subkapitole 5.1.

34,2 % (údaje v předposledním sloupci vpravo). Za celé období činilo environmentální zdraví systému téměř 30 % (údaj v posledním poli vpravo).

Tabulka 5: Výpočetní tabulka příkladu *Environmentální zdraví ekonomiky*

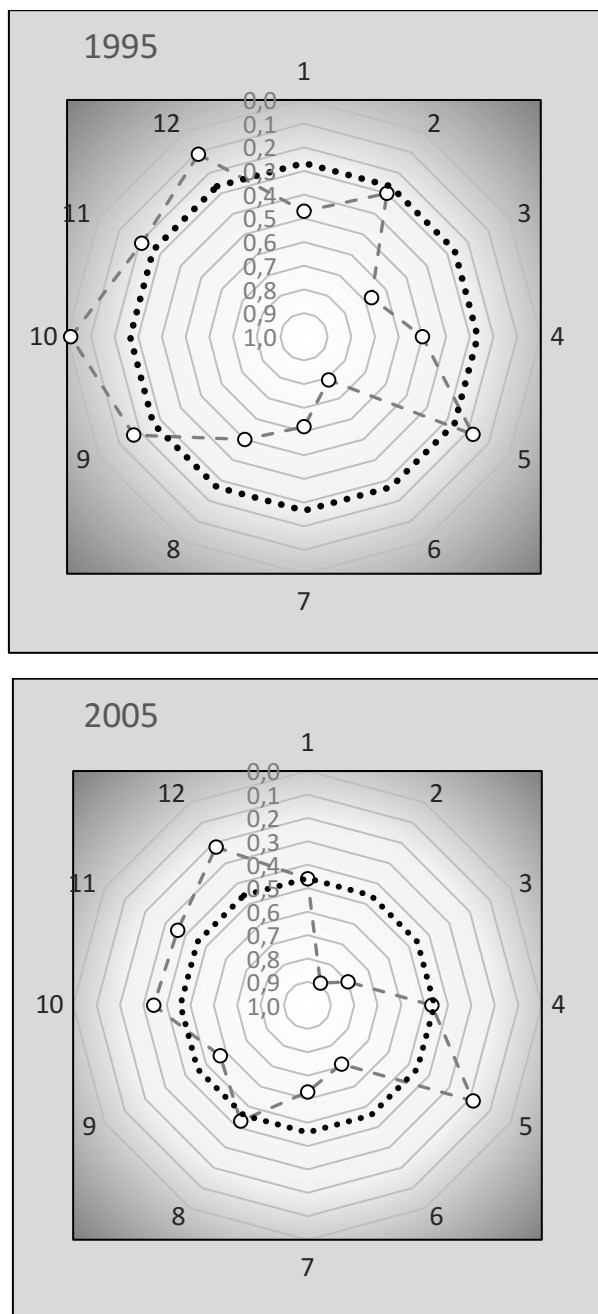
| Environmen. pilíř statická úloha | | Environmen. pilíř statická úloha | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------------|------|----------------------------------|-------------------------|--------------------------|--|-------------------------------|------------------------------------|--------------------------|--------------------|--------------------------------------|--------------------------------|---|----------------------------|-----|--------|--------|
| | | Emise skleníkových plynů | Kvalita vzduchu I.třídy | Znečištění vody fosforem | Spotřeba primárních energetických zdrojů | Podíl energie z obnov. zdrojů | Preprav. výkony v nákladní dopravě | Spotřeba průmysl. hnojiv | Spotřeba pesticidů | Recyklace odpadu a druhotná surovina | Podíl ekologického zemědělství | Veřejné výdaje na ochranu životního prostředí | Materiálové využití odpadů | | | |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | | | |
| původní údaje <i>a</i> | 1995 | 143 | 30 | 0,3 | 1750 | 3,5 | 1467 | 83 | 3781 | 17 | 0,4 | 8860 | 0,3 | | | |
| | 1996 | 150 | 41 | 0,3 | 1823 | 3,9 | 1528 | 81 | 3908 | 16 | 0,4 | 8898 | 0,4 | | | |
| | 1997 | 154 | 39 | 0,3 | 1745 | 4,1 | 1517 | 77 | 4489 | 17 | 0,5 | 9028 | 0,4 | | | |
| | 1998 | 145 | 56 | 0,3 | 1659 | 4,3 | 1499 | 73 | 4135 | 18 | 1,7 | 9184 | 0,4 | | | |
| | 1999 | 138 | 72 | 0,3 | 1621 | 4,7 | 1517 | 66 | 4197 | 20 | 2,6 | 9909 | 0,4 | | | |
| | 2000 | 144 | 88 | 0,3 | 1657 | 4,1 | 1576 | 76 | 4301 | 26 | 3,9 | 10053 | 0,4 | | | |
| | 2001 | 144 | 87 | 0,2 | 1693 | 4,3 | 1618 | 92 | 4388 | 41 | 5,1 | 10795 | 0,4 | | | |
| | 2002 | 139 | 85 | 0,2 | 1705 | 4,6 | 1642 | 92 | 4688 | 45 | 5,5 | 12315 | 0,5 | | | |
| | 2003 | 143 | 88 | 0,2 | 1803 | 2,8 | 1695 | 80 | 4309 | 47 | 6 | 13298 | 0,6 | | | |
| | 2004 | 141 | 90 | 0,2 | 1825 | 3,6 | 1770 | 100 | 4264 | 51 | 6,2 | 14380 | 0,6 | | | |
| | 2005 | 143 | 89 | 0,2 | 1855 | 3,7 | 1737 | 81 | 4219 | 57 | 6,9 | 14598 | 0,7 | | | |
| dolní mez | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 800 | 10 | 500 | 0 | 0 | 500 | 0 | | | | |
| horní mez | 250 | 100 | 0,9 | 3500 | 20 | 4000 | 200 | 7000 | 100 | 20 | 40000 | 3 | | | | |
| normované údaje <i>A</i> | 1995 | 47% | 30% | 67% | 50% | 18% | 79% | 62% | 50% | 17% | 2% | 21% | 11% | 27% | 21,30% | |
| | 1996 | 43% | 41% | 71% | 48% | 20% | 77% | 63% | 48% | 16% | 2% | 21% | 12% | 28% | 22,10% | |
| | 1997 | 42% | 39% | 64% | 50% | 21% | 78% | 65% | 39% | 17% | 2% | 22% | 13% | 28% | 22,20% | |
| | 1998 | 46% | 56% | 67% | 53% | 22% | 78% | 67% | 44% | 18% | 8% | 22% | 14% | 34% | 26,70% | |
| | 1999 | 49% | 72% | 70% | 54% | 24% | 78% | 71% | 43% | 20% | 13% | 24% | 15% | 37% | 29,40% | |
| | 2000 | 46% | 88% | 69% | 53% | 21% | 76% | 65% | 42% | 26% | 19% | 24% | 13% | 38% | 30,40% | 25,90% |
| | 2001 | 46% | 87% | 81% | 52% | 21% | 74% | 57% | 40% | 41% | 26% | 26% | 14% | 41% | 32,60% | |
| | 2002 | 48% | 85% | 80% | 51% | 23% | 74% | 57% | 36% | 45% | 28% | 30% | 17% | 43% | 33,90% | |
| | 2003 | 46% | 88% | 78% | 48% | 14% | 72% | 63% | 41% | 47% | 30% | 32% | 19% | 42% | 33,70% | |
| | 2004 | 47% | 90% | 81% | 48% | 18% | 70% | 52% | 42% | 51% | 31% | 35% | 20% | 44% | 34,80% | |
| | 2005 | 46% | 89% | 80% | 47% | 18% | 71% | 63% | 43% | 57% | 34% | 36% | 22% | 46% | 36,20% | 34,20% |

Zdroj: Vlastní propočty a vstupní ukazatele ČSÚ 2006

Vhodně konstruovaný souhrnný ukazatel environmentálního zdraví dává možnost získat souhrnné hodnocení jak za mnoho ukazatelů, tak dokonce za zvolená časová období. Obdobně by bylo možno postupovat i v dynamické úloze. Vhodně zvolený systém musí odpovídat věcné podstatě problematiky a často umožňuje i řešení úlohy podílu vlivů dílčích ukazatelů na dosaženou úroveň souhrnného ukazatele nebo i vývoje souhrnného ukazatele.

Pokud nebudou výsledky členěny do třech pilířů, tj. ekonomický, environmentální a sociální, tak se lze ilustračně podívat na vyhodnocení samostatného environmentálního pilíře, což umožní představit některá zobrazení, která jsou nadějná i pro produkční funkce. Ve sloupci *kompozit* jsou geometrické průměry dílčích normovaných ukazatelů za jednotlivé analyzované roky z dolní části tabulky.

Obrázek 16 a 17: Dílčí normované environmentální ukazatele za rok 1995 a 2005



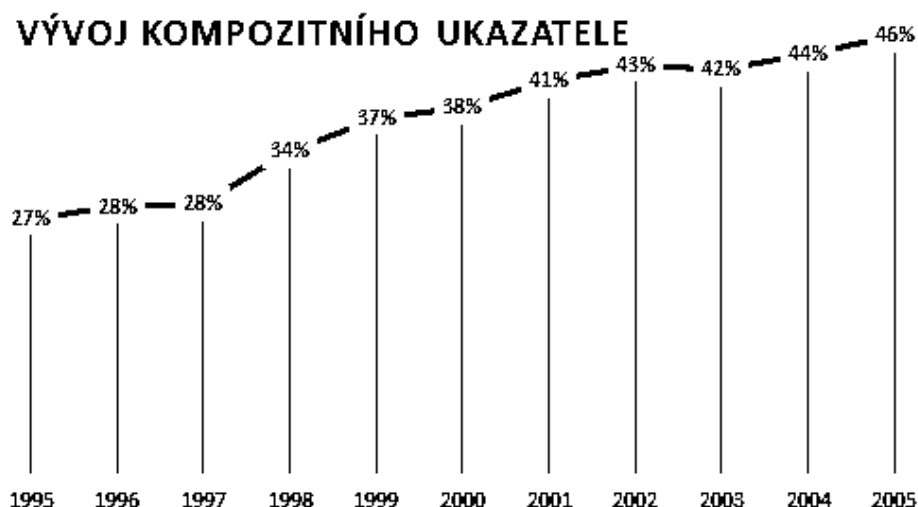
Zdroj: vlastní zobrazení

Za každý rok lze nakreslit následující pavučinový graf doplněný kompozitním ukazatelem v podobě tečkované lomené čáry představující pravidelný dvanáctiúhelník. Čím má tento mnohoúhelník menší svou kružnici vepsanou, tím je

system (firma, stát) z hlediska environmentálního zdravější. Následující dva obrázky 16 a 17 zobrazují situaci za první sledovaný rok 1995 a poslední sledovaný rok 2005.

Porovnáním obou obrázků lze názorně zjistit, že až na 2 ukazatele (č. 1 Emise skleníkových plynů a č. 4 Spotřeba primárních energetických zdrojů), které v podstatě stagnují, všechny ostatní dílčí ukazatele rostly. Obrázec daný čárkovanou čarou je ale podobný, takže vzájemné proporce se příliš neměnily. Čárkovaný dvanáctiúhelník v obrázku 16 se do obrázku 17 viditelně zmenšil, z čehož je zřejmé, že environmentální zdraví rostlo. Jak se environmentální zdraví za ČR měnilo v jednotlivých sledovaných letech, je zřejmé z obrázku 18.

Obrázek 18: Vývoj environmentálního zdraví ČR za období 1995 až 2005



Zdroj: vlastní zobrazení

Příklad 2: Zobrazení dílčích ukazatelů a multiplikativního kompozitního ukazatele.

Smyslem tohoto ilustračního příkladu je ukázat názornost zobrazení dílčích normovaných ukazatelů a multiplikativního kompozitního ukazatele v jediném grafu. Předpokládáme, že máme k dispozici 12 dílčích ukazatelů normovaných v intervalu od (0 do 1). Nulová hodnota kteréhokoliv dílčího ukazatele znamená kolaps celého systému. Hodnota 1 znamená optimální velikost.

Jedním z dílčích ukazatelů může být např. čistota odpadních vod. Tento dílčí ukazatel má hodnotu 1, pokud odpadní vody vůbec neohrožují okolí podniku a jejich případné dočištění je v silách přírody. Hodnotu 0 má pokud odpadní vody obsahují kyanid či jiné jedovaté látky, které zahubí život v místní řece a může ohrozit i zdraví a životy lidí v užším nebo dokonce v širším okolí. V následujících tabulkách jsou v 1. sloupci pořadová čísla dílčích ukazatelů; ve 2. sloupci jsou hodnoty normovaných dílčích ukazatelů v daný okamžik a ve 3. sloupci se ve všech řádcích opakuje hodnota výsledného kompozitního ukazatele.

Pro ilustraci jsou uvedeny čtyři typické varianty A) neutrální; B) zdravý; C) ohrožený; D) kolabující podnik.

Varianta A)

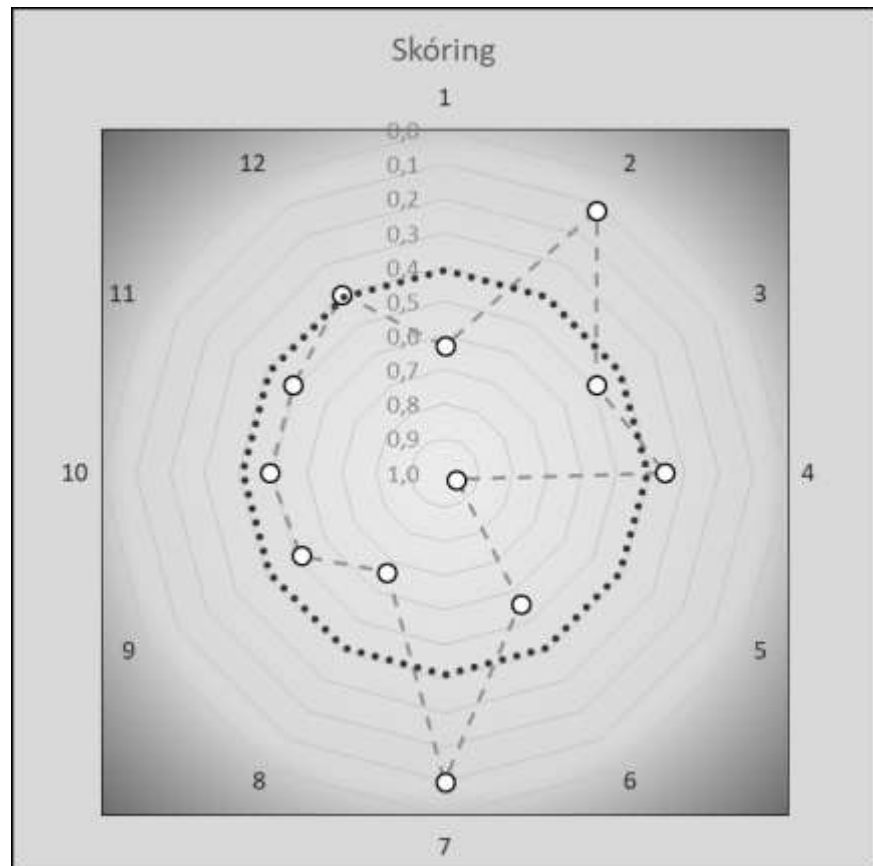
Dílčí ukazatele nabývají hodnot mezi 0,12 a 0,96. Kompozitní ukazatel je 0,41, tj. pod 0,5. Je to důsledek kolísavých hodnot první poloviny dílčích ukazatelů. Druhá polovina ukazatelů se drží okolo hodnoty 0,5. Je to taková neutrální poloha. Ani blízky kolaps, ani velmi zdravý podnik. Rozhodně je to signál pro hledání a realizování ozdravných opatření.

Tabulka 6: varianta A

| | D.U. | K.U. |
|----|------|------|
| 1 | 0,63 | 0,41 |
| 2 | 0,12 | 0,41 |
| 3 | 0,49 | 0,41 |
| 4 | 0,36 | 0,41 |
| 5 | 0,96 | 0,41 |
| 6 | 0,56 | 0,41 |
| 7 | 0,1 | 0,41 |
| 8 | 0,67 | 0,41 |
| 9 | 0,52 | 0,41 |
| 10 | 0,49 | 0,41 |
| 11 | 0,49 | 0,41 |
| 12 | 0,4 | 0,41 |

Zdroj:
vlastní zpracování

Obrázek 19: Varianta A) Neutrální hodnocení



Zdroj: vlastní zobrazení

Varianta B)

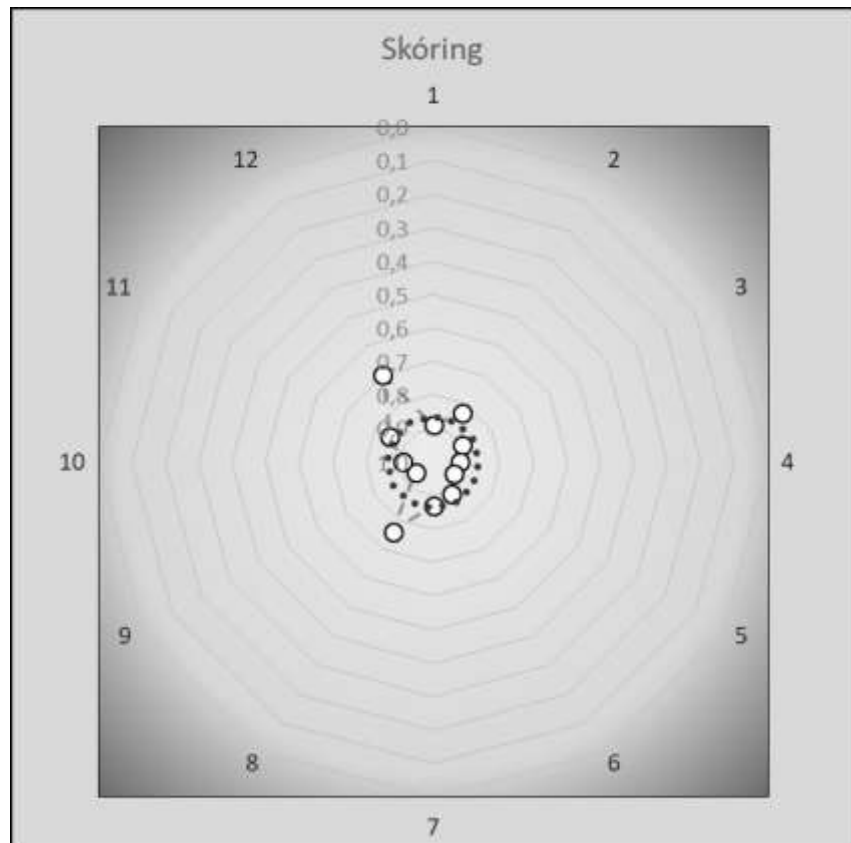
Dílčí ukazatele nabývají hodnot mezi 0,70 a 0,94. Kompozitní ukazatel je 0,86, tj. blízko 1. Je to důsledek vysokých hodnot téměř všech dílčích ukazatelů. Většina z nich se pohybuje okolo hodnoty 0,9. Je to velmi zdravý podnik po všech stránkách. Všechny dílčí ukazatelé jsou blízko středu grafu, kde je také zobrazeno tečkované kolečko o malém průměru ilustrující vysokou hodnotu kompozitního ukazatele.

Tabulka 7: varianta B

| | D.U. | K.U. |
|----|------|------|
| 1 | 0,89 | 0,86 |
| 2 | 0,83 | 0,86 |
| 3 | 0,9 | 0,86 |
| 4 | 0,92 | 0,86 |
| 5 | 0,93 | 0,86 |
| 6 | 0,89 | 0,86 |
| 7 | 0,87 | 0,86 |
| 8 | 0,76 | 0,86 |
| 9 | 0,94 | 0,86 |
| 10 | 0,91 | 0,86 |
| 11 | 0,85 | 0,86 |
| 12 | 0,7 | 0,86 |

Zdroj:
vlastní zpracování

Obrázek 20: Varianta B) Zdravý podnik



Zdroj: vlastní zobrazení

Varianta C)

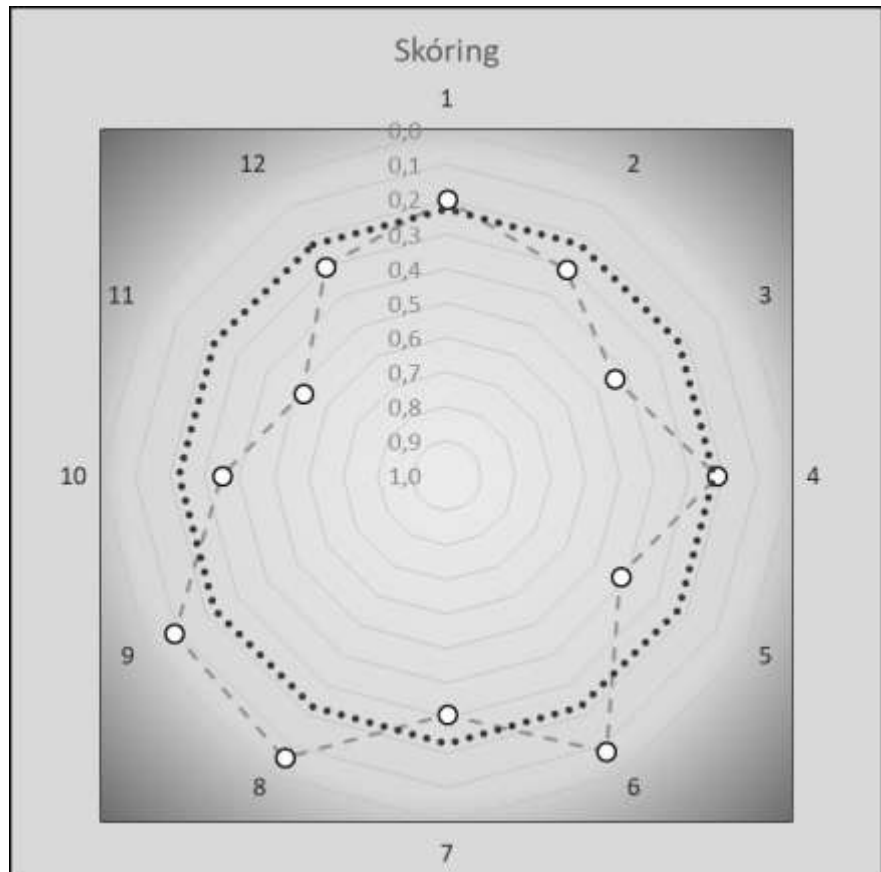
Ve variantě C nabývají dílčí ukazatele nízkých hodnot v intervalu mezi 0,06 a 0,52. Kompozitní ukazatel je podle očekávání nízký 0,23, tj. blízko 25 %. Je to důsledek nízkých hodnot téměř všech dílčích ukazatelů. Hodnoty dílčích ukazatelů jsou více volatilní, avšak jen jedna hodnota je nad 0,5. Zdraví této firmy je vážně ohrožené, je proto nezbytné přijmout v rámci krizového managementu zásadní účinné změny a inovace pro odvrácení hrozícího kolapsu.

Tabulka 8: varianta C

| | D.U. | K.U. |
|----|------|------|
| 1 | 0,2 | 0,23 |
| 2 | 0,31 | 0,23 |
| 3 | 0,44 | 0,23 |
| 4 | 0,22 | 0,23 |
| 5 | 0,42 | 0,23 |
| 6 | 0,08 | 0,23 |
| 7 | 0,31 | 0,23 |
| 8 | 0,06 | 0,23 |
| 9 | 0,09 | 0,23 |
| 10 | 0,35 | 0,23 |
| 11 | 0,52 | 0,23 |
| 12 | 0,3 | 0,23 |

Zdroj:
vlastní zpracování

Obrázek 21: Varianta C) Ohrožené zdraví



Zdroj: vlastní zobrazení

Varianta D)

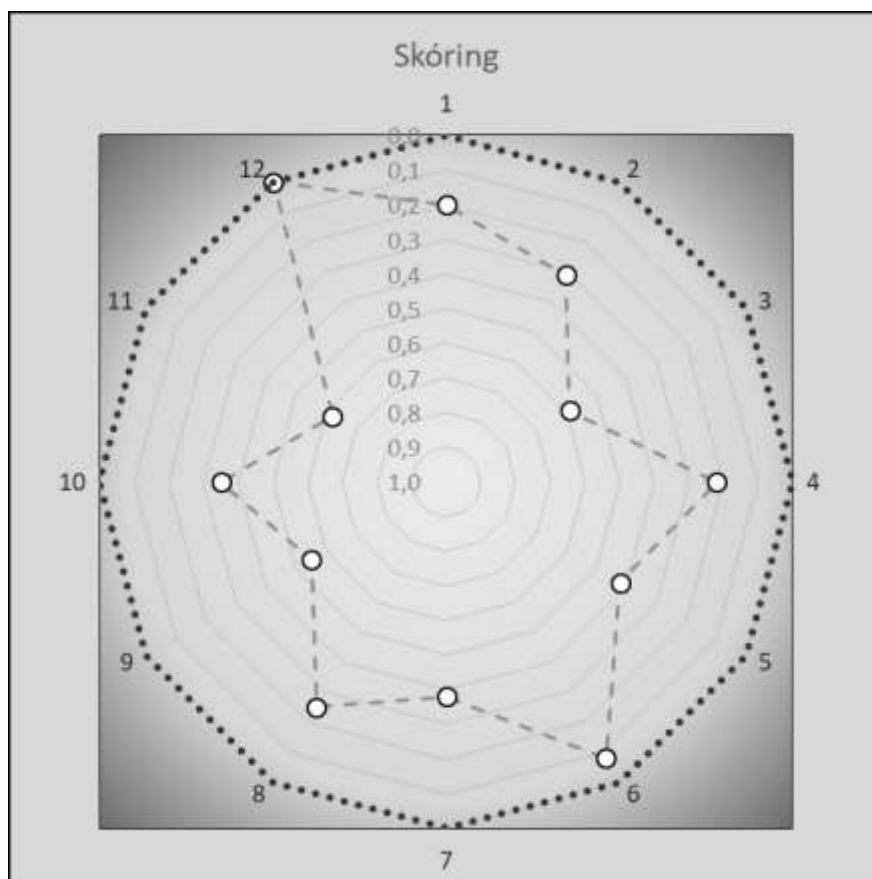
Dílčí ukazatele nabývají hodnot mezi 0 a 0,62. Kompozitní ukazatel má kritickou hodnotu 0. Je to způsobeno tím, že ukazatel č. 12 má kritickou kolabující hodnotu 0 a proto kolabuje celý podnik vzdor tomu, že několik dílčích ukazatelů se pohybuje okolo hodnoty 0,5. Selhání jednoho z klíčových článků podnikového systému vedl ke kolapsu celé firmy.

Tabulka 9: varianta D

| | D.U. | K.U. |
|----|------|------|
| 1 | 0,2 | 0 |
| 2 | 0,31 | 0 |
| 3 | 0,59 | 0 |
| 4 | 0,22 | 0 |
| 5 | 0,42 | 0 |
| 6 | 0,08 | 0 |
| 7 | 0,38 | 0 |
| 8 | 0,25 | 0 |
| 9 | 0,55 | 0 |
| 10 | 0,35 | 0 |
| 11 | 0,62 | 0 |
| 12 | 0 | 0 |

Zdroj:
vlastní zpracování

Obrázek 22: Varianta D) Kolaps



Zdroj: vlastní zobrazení

Z uvedeného je zřejmé, že interpretace a grafické znázornění kompozitního ukazatele s multiplikativní vazbou je mimořádně názorné. V diagramech lze také sledovat postupný vývoj, který umožňuje odhalovat tendence. Do diagramu lze vložit také cílové hodnoty a sledovat jejich postupné plnění.

Logika uvedeného zobrazení si vyžaduje pokud možno nezávislé ukazatele. Výhodou procesu normování je, že normované veličiny se již nemusí vážit, zato musíme znát jejich kritickou a optimální hodnotu. Multiplikativní vazba rozhodně není jediná agregátní funkce, avšak její vlastnosti nejsou všeobecně známé, proto stojí za to seznámat s nimi jak odbornou, tak laickou veřejnost.

7 Konstantní produkční funkce u kryptoměn

Vzhledem k tomu, že existují také některé specifické či zvláštní produkční funkce, je vhodné uvést v této monografii také příklad tzv. **konstantní produkční funkce**.

Konstantní produkční funkce znamená, že množství produkce na výstupu je nezávislé na množství vstupních např. „výrobních faktorů“. Pokud budeme snižovat či zvyšovat vstupy, nebude to mít vliv na množství výstupů (produkce), které bude stále stejné.

Představa, že by produkční funkce mohla být konstantní, se zdá být v rozporu s přirozeným chováním přírody, v rozporu s fyzikálními zákony. Zákon zachování energie říká, že celková energie izolované soustavy je konstantní, více viz (Feynman, 1970). Z toho vyplývá, že pokud do systému dodáváme nové vstupní „výrobní faktory“, novou energii, musí se to projevit na výstupu systému. Hmotné výstupy systému vzrůstají, avšak může nastat situace, že tyto hmotné výstupy nebudou považovány za produkci. Produkce může být čistě nehmotná a poté nemusí záviset na množství „vstupních faktorů“. Není tak porušen zákon zachování energie.

Příkladem nehmotné produkce jsou nově vzniklé jednotky kryptoměny. Kryptoměn existuje velké množství, v této kapitole budeme konstantní produkční funkci demonstrovat na příkladu nejznámější kryptoměny Bitcoin (Nakamoto, 2008), u většiny ostatních kryptoměn by situace byla v principu velmi podobná, ale odlišnosti by byly technického charakteru, jejichž popisem bychom se vzdalovali hlavní myšlence této monografie.

Kryptoměny jsou decentralizované platební systémy, ve kterých se vlastnictví převádí výhradně kryptograficky (Lánský, 2018). Bitcoin je platební systém, jehož základní platební jednotkou je 1 satoshi, odvozenou platební jednotkou je 1 bitcoin, který se rovná 100 000 000 satoshi. Bitcoin s velkým „B“ je označení celého platebního systému, zatímco bitcoin s malým „b“ je označení platební jednotky. Jedná se o analogii platebních jednotek státních měn, například měna česká koruna má základní jednotku 1 česká koruna, která se dále dělí na 100 haléřů. V případě Bitcoinu nastává odlišnost, že odvozená jednotka vzniká vynásobením hodnoty základní jednotky, nikoliv jejím vydělením, jak je tomu zvykem u státních měn.

Kryptoměnové platební systémy nemají své platební jednotky ve fyzické formě, ale pouze v digitální formě, jako záznam v distribuované databázi zvané bločenka, anglicky blockchain. V bločence dané kryptoměny jsou uloženy informace o vlastnictví všech existujících jednotek dané kryptoměny. Jednotky kryptoměny jsou uloženy na adresách, což je analogie k bankovním účtům ze světa státních měn. Vlastnictví adres a jednotek kryptoměny na nich uložených není spojeno s identitou fyzických či právnických osob, ale se znalostí přístupového hesla zvaného soukromý klíč. Kdo se touto znalostí soukromého klíče prokáže, je považován za vlastníka, má právo nakládat s jednotkami kryptoměny, které se nacházejí na adrese odpovídající tomuto soukromému klíči.

Vlastník adresy smí provádět transakce, zasílat jednotky kryptoměny ze své adresy ve prospěch jiných adres. Po provedení transakce dojde ke změně vlastnictví jednotek kryptoměny, přestanou být majetkem odesilatele transakce a stanou se majetkem

příjemce transakce. Údaje o proběhlých transakcích a z nich vyplývajícím stavu vlastnictví jednotek dané kryptoměny se souhrnně označují jako stav systému. Stav systému je pravidelně rozšiřován o bloky, které obsahují nové transakce.

Kryptoměny jsou decentralizované systémy, neexistuje v nich žádná centrální autorita, která by rozhodovala, které transakce jsou platné a budou zařazeny do bloku transakcí. Platnost transakce může ověřit každý uzel decentralizované sítě, je to taková transakce, jejíž odesílatel prokázal znalost soukromého klíče k odpovídající adrese, ze které odesílá finanční prostředky. Problém by mohl nastat pouze v situaci, že vlastník adresy se pokusí o podvod zvaný útok dvojitého utrácení. Vlastník adresy vytvoří dvě transakce. V první transakci zašle jednotky kryptoměny ze své adresy ve prospěch jednoho příjemce a ve druhé transakci zašle ty samé jednotky kryptoměny ze své adresy ve prospěch jiného příjemce. V případě existence centrální autority by bylo snadné první z těchto transakcí označit za platnou a druhou za neplatnou, nicméně v decentralizovaném systému je situace složitější. Jednotlivé uzly sítě nemusejí transakce obdržet ve stejném pořadí, nelze tedy rozhodnout, která z transakcí byla první.

Kryptoměnový systém musí mít nějaký mechanismus dosahování konsensu, který rozhodne, které transakce jsou platné, musí být schopen se vypořádat i s pokusem o útok dvojitého utrácení. Protože jsou kryptoměny decentralizované, je nutné použít mechanismus, kterým se jednotlivé decentralizované uzly shodnou na konsensu o stavu systému a jeho rozšíření o nové bloky transakcí.

Kryptoměny k dosahování konsensu o svém stavu používají různé mechanismy zvané důkazy, nejstarším z nich je důkaz prací, používaný například kryptoměnou Bitcoin. Při důkazu prací získá právo rozšířit stav systému o blok nových transakcí ten uzel kryptoměnového systému, který jako první najde správné řešení obtížného matematického problému. Uzly, které se pokoušejí hledat řešení problému, se nazývají těžaři a proces hledání řešení se nazývá těžba. Matematickým problémem bývá obvykle hledání takového vstupu hašovací funkce, aby výstup této hašovací funkce začínal na předem stanovený počet nul. Množství výpočetních operací nutných v průměrném případě k nalezení správného řešení exponenciálně roste s požadovaným množstvím počátečních nul haše.

Hledání správného řešení je náročné na výpočetní výkon, tedy na hardware a spotřebovanou elektrickou energii. Je nutné motivovat uzly kryptoměnového systému, aby se o nalezení řešení pokoušely. Motivací je odměna v podobě jednotek dané kryptoměny, kterou získá uzel, který našel správné řešení a jehož blok transakcí se stal součástí konsensu o stavu kryptoměnového systému. Této odměně se obvykle říká odměna za vytěžení bloku. Tato odměna se obvykle skládá z pevné části v podobě nově vytvořených jednotek kryptoměny a proměnlivé části v podobě transakčních poplatků, které platí odesílatelé transakcí.

Z hlediska produkční funkce je zajímavá konstantní část odměny v podobě nově vytvořených jednotek kryptoměny. V případě Bitcoinu byla tato odměna původně nastavena na 50 bitcoinů. Následně se každé 4 roky snižuje na polovinu, tomuto okamžiku snižování odměny se říká půlení odměny, anglicky halving. V roce 2021 tato odměna činí 6,25 bitcoinů, v minulosti došlo již ke třem půlením.

Proč dochází ke snižování pevné části odměny za vytěžení bloku? Je to z důvodu regulace množství nově vytvářených jednotek kryptoměny, tak aby, celkové množství jednotek kryptoměny dosáhlo v limitě konstantní hodnoty. V případě Bitcoinu bude celkově existovat pouze 21 000 000 bitcoinů, této hodnoty bude dosaženo v roce 2140, přičemž v roce 2021 je vytěženo již více než 18 000 000 bitcoinů. Toto omezení celkového množství jednotek je konkurenční výhodou kryptoměn oproti státním měnám, u kterých mohou centrální banky vytvářet libovolné množství jednotek.

K omezení maximálního celkového množství jednotek kryptoměny na konstantní hodnotu je nutné nejen regulovat množství nově vytvářených jednotek kryptoměny v každém bloku transakcí, ale rovněž i rychlost, kterou jsou nové bloky transakcí vytvářeny. V případě Bitcoinu je střední doba mezi vytvořením dvou bloků transakcí nastavena na 10 minut.

Skutečná doba nalezení bloku závisí na výpočetním výkonu, který je využit na řešení matematického problému hledání haše začínajícího na požadovaný počet počátečních nul. Pokud zvýšíme množství výpočetního výkonu, budeme řešení hledat rychleji a tím se zkrátí doba nalezení nového bloku. Kryptoměnové systémy mají ale samoregulační mechanismus, který zabraňuje tomu, aby se doba nalezení bloku zkracovala (či prodlužovala) oproti stanovené hodnotě.

Pokud má kryptoměnový systém jako celek příliš vysoký výpočetní výkon, může krátkodobě dojít k rychlejšímu těžení nových bloků, ale ze střednědobého hlediska dojde k aktivaci automatického mechanismu, který obtížnost těžby zvýší, aby se doba vytěžení bloku vrátila na požadovanou úroveň. Analogicky při snížení výpočetního výkonu sítě dojde k automatickému snížení obtížnosti matematického problému. Tato úprava obtížnosti matematického problému probíhá v Bitcoinu jednou za 14 dní.

Nyní si rekapitulujeme důležité informace o kryptoměnách, které se týkají produkční funkce. „Výrobními faktory“ zařízení provádějící matematické výpočty a elektrická energie, které souhrnně označujeme jako výpočetní výkon. Produkci jsou nově vytvořené jednotky kryptoměny.

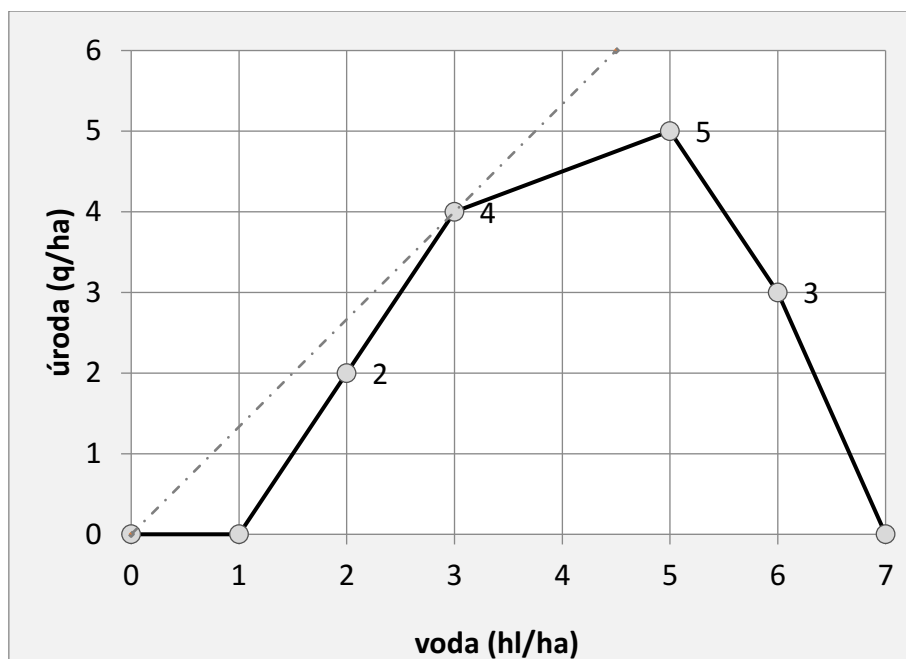
Z krátkodobého hlediska produkce roste s růstem „výrobních faktorů“. Ze střednědobého hlediska je aplikován samoregulační mechanismus, který upravuje obtížnost těžby a zaručuje konstantní produkci bez ohledu na „výrobní faktory“. Z dlouhodobého hlediska se navíc aplikuje další samoregulační mechanismus, který tuto konstantní produkci snižuje, každé 4 roky na polovinu, a to opět bez ohledu na „výrobní faktory“.

8 Farmářská úloha rozdělení vody

Tragédie obecní pastviny⁶², lov na jelena či farmářská úloha jsou jen některé názvy často citovaných úloh z teorie her. Produkční nebo také výherní funkce je v teorii her velmi častým nástrojem používaným při optimalizačních úlohách různého druhu. Její zevrubné představení v této monografii má za účel konkretizovat některé obecné úvahy na názorných a obecně známých úlohách. Proto se bude monografie k této úloze nadále několikrát vracet.

Farmářská úloha řeší problém rozdělení vody ze společné studny pro dva⁶³ či více farmářů, kteří mají různě velké pozemky. Pro ilustraci použití produkční funkce stačí v prvním kroku řešit úlohu s optimálním množstvím vody a dva farmáře označené **A** a **B**. Farmář **A** má 6 políček zatímco farmář **B** 4 srovnatelná pole. Ve společné studni je 30 hl. vody, o kterou se mají podělit. Farmáři pěstují plodiny, jejichž produkční funkce vyjadřuje, kolik vody je potřeba na sklizeň určitého množství úrody. Pro oba farmáře platí zjednodušená lomená produkční funkce (obrázek 23) analogická té, která je na obrázku 6. Pokud optimální množství vody ve studni rozdělí farmáři na všechna políčka rovnoměrně, vyjdou na jedno pole 3 hl, což představuje na produkční funkci bod 4, kde je voda nejlépe využita. Součet úrod obou farmářů je v tomto případě nejvyšší.

Obrázek 23: Příklad produkční funkce k farmářské úloze



Zdroj: vlastní zobrazení

Pokud použije jeden z farmářů více vody, budou oba farmáři její využití optimalizovat podle těchto zásad:

⁶² Např. Binmore (2014, s. 86–90).

⁶³ Později budeme úlohu rozšiřovat v několika směrech, např. budeme zvažovat 3 aktéry, nadbytečné množství vody či nedostatečné nebo budeme analyzovat vliv různých produkčních funkcí, tj. lomené, spojité, polynomicke apod.

- na žádné políčko nedají více než 5 hl. vody, neboť jak je zřejmé z uvedené produkční funkce, tím by již úrodu snižovali,
- pokud na farmáře zbyde vody méně, může ji rozdělit na políčka buď rovnoměrně, nebo efektivně, tj. na každé políčko dá optimální 3 hl a zbytek přidá na poslední zalité políčko. Např. pokud 10 hl. rozdělí na 6 políček rovnoměrně, tj. po 1,7 hl., tak z jednoho plíčka sklídí 1,4 q, tj. z 6 políček 8,4 q. Pokud farmář dá efektivně na 2 políčka 3 hl a na třetí zbylé 4 hl. (takže 3 políčka nevyužije) získá největší celkovou úrodu 12,5 q.

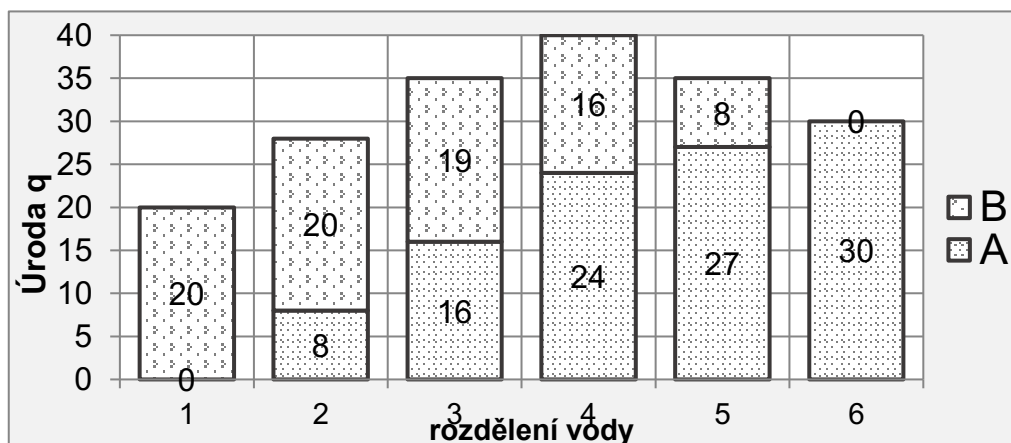
Tabulka 10 ukazuje, jakou úrodu získá farmář **A**, **B** a oba dohromady, což zde symbolizuje společnost. Jednotlivé řádky představují různé rozdělení 30 hl. vody od případu, kdy odebere veškerou vodu farmář **B** až po případ, kdy veškerou vodu zužitkuje farmář **A**. Maximální součet úrod obou farmářů 40 q nastává v případě, že si rozdělí vodu ve stejném poměru, jako vlastní políčka.

Tabulka 10: Řešení farmářské úlohy

| | A | B | celkem | A | B | úrody | | |
|--------------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| <i>půda</i> | 6 | 4 | 10 | hl/ha | hl/ha | A | B | celkem |
| 0:30 | 0 | 30 | 30 | 0 | 7,5 | 0 | 20 | 20 |
| 6:24 | 6 | 24 | 30 | 1 | 6 | 8 | 20 | 28 |
| 12:18 | 12 | 18 | 30 | 2 | 4,5 | 16 | 19 | 35 |
| 18:12 | 18 | 12 | 30 | 3 | 3 | 24 | 16 | 40 |
| 24:6 | 24 | 6 | 30 | 4 | 1,5 | 27 | 8 | 35 |
| 0:35 | 30 | 0 | 30 | 5 | 0 | 30 | 0 | 30 |

Zdroj: vlastní propočty

Graf 1: úroda dle farmářů



Zdroj: vlastní propočty

Obrázek 11 ukazuje jak maximální společnou úrodu 40 q, tak důsledky jiného než optimálního rozdělení vody. Pokud si jeden z farmářů odebere více vody, než odpovídá poměru rozlohy pozemků, získá tento farmář více úrody, avšak evidentně na úkor druhého farmáře a „**celé**“ **společnosti**. Vysvětlení dává produkční funkce. Maximální společná úroda nastane, pokud budeme v bodě [3; 4]. Pokud bude jeden z farmářů na produkční funkci na spojnici bodů [3; 4] a [5; 5], bude mít větší úrodu, ale naruší tím efektivní proporci odběru vody. Využití bodu [5; 5] je tedy přípustné jen tehdy je-li daného zdroje dostatek a není potřebné s ním šetřit.

9 Potenciální produkt a produkční mezera

Ke zjištění vývoje potenciálního produktu a produkční mezery v ČR byly použity údaje o zdrojích hrubé přidané hodnoty (HPH) v jednotlivých odvětvích z Českého statistického úřadu. Samotné hodnoty potenciálního produktu pak byly odhadnuty pomocí ekonometrického programu Gretl. Cílem práce je zhodnotit vývoj potenciálního produktu a produkční mezery v ČR pomocí ekonometrických nástrojů. Na základě analýzy vývoje lze vysledovat, kdy docházelo ke konjunkturu a kdy k recesi v jednotlivých odvětvích. Každé odvětví se určitým poměrem podílí na celkové HPH, tedy i na celkovém ekonomickém cyklu ČR. Dílčím cílem příspěvku je predikovat budoucí vývoj potenciálního produktu na základě posledních dostupných dat a srovnáním podobných situací v minulosti.

Úvodní část zkoumá podstatu těžkostí s odhady potenciálního produktu. Jeho problematičnost dokazuje nejen několik metod výpočtu, ale i mnoho autorů, kteří se mnohdy neshodnou ani na základních parametrech svého výpočtu. Tato část začíná přehledem závěrů mezinárodního, domácího teoretického a empirického výzkumu. Dále je vysvětlena podstata dvou základních metod výpočtu potenciálního produktu, načež se práce zaměří na jednu, pomocí které dojde v empirické části k analýze jeho vývoje. Objasněna je metoda výpočtu pomocí HP filtru a nakonec jsou definována data pro jednotlivá odvětví a jejich časových řad.

Empirická část zprvu zkoumá původní data a její časové řady a testuje, zda jsou jednotlivé časové řady stacionární. U každé časové řady jednotlivých odvětví jsou zdůrazněny její vrcholy, dna, či zda jsou nějaké odlišnosti od vývoje ostatních odvětví. Druhou kapitolou je aplikace HP filtru, ze kterých jsme získali data o potenciálním produktu a o produkční mezeře. Následně byl analyzován jejich vývoj v čase u každého odvětví a v celém národním hospodářství.

Závěr přináší shrnutí a objasnění získaných výsledků z empirické části, zda byl splněn cíl práce a je tu predikován budoucí vývoj sledovaných ukazatelů na základě posledních dostupných dat a vývoje v minulosti.

9.1 Potenciální produkt

Makroekonomické přístupy k odhadu potenciálního produktu vycházejí ze zjištění trendu vývoje reálného HDP (Hájek, Bezděk, 2000). Potenciální produkt je definován jako reálná optimální úroveň výstupu, jež je možno vyrobit při dané existující produkční technologii a výrobních faktorech. Hodnotu potenciálního produktu nelze přímo změřit, nýbrž pouze odhadnout (Hloušek, Polanský, 2007). (McMorrow, Roeger, 2001) věnují velkou pozornost zjišťování potenciálního produktu, jako přímo neměřitelné veličiny, diskutují zejména podstatu použitého konceptu. K odhadu potenciálního produktu používají statistické metody nebo ekonometrickou analýzu.

V této kapitole bude použita metoda odhadu potenciálního produktu pomocí aplikace Hodrick-Prescottova filtru (HP filtr). Tato metoda vede k získání potenciálního produktu **vyhlazením** průběhu HDP (Hodrick, Prescott, 1980). Druhou často používanou

metodou je zjištění potenciálního produktu a produkční mezery pomocí produkční funkce. Touto metodou se nejčastěji odhaduje pomocí Dvoufaktorové Cobb-Douglasovy produkční funkce (Jašová, 2011). Obě metody byly doporučeny a aplikovány sekretariátem OECD pro vyspělé země viz (Giorno, 1995). Zjištěný potenciální produkt je nezbytný pro výpočet produkční mezery, která je definována jako rozdíl mezi skutečným a potenciálním produktem k potenciálnímu produktu, tedy (Hráčková, 2015): Produkční mezera (v %) = $(Y - Y^*) / Y^*$.

9.2 Potenciální produkt jako průměr

Produkční funkce modeluje výsledek či výkon analyzovaného systému, který je disponuje vstupy v podobě výrobních faktorů. V národohospodářské verzi je to obvykle reálný produkt. V krátkém období je často předmětem analýzy zjištění, zda jsou využívány disponibilní kapacity, či nikoliv nebo zda jsou tyto kapacity neefektivně přetěžovány. Tuto např. národní kapacitu je potřeba vhodnými nástroji odhadnout. Nejčastěji se k tomu používá v dlouhodobém horizontu potenciální produkt. Změna kapacity státu představuje především investice a ty prakticky nelze zrealizovat v krátkém období.

V dlouhodobém horizontu není reálně možné, aby byl reálný produkt trvale pod produktem potenciálním, neboť by to znamenalo dlouhodobé systematické nevyužívání kapacit a z toho plynoucí nedostatečné splácení investičních půjček, plýtvání prostředky např. na udržování nevyužitých kapacit, neefektivní fungování trhu práce, nárůstu nezaměstnanosti a permanentní recese. Stejně tak není prakticky možné udržovat ekonomiku trvale nad potenciálním produktem, to by znamenalo, že systematicky těžíme ze stávajících kapacit neefektivně, zaměstnáváme i občany, kteří tvoří přirozenou nezaměstnanost, neinvestujeme a využíváme již překonané technické i jiné vybavení.

Z uvedeného je zřejmé, že potenciální produkt je někde mezi skutečně dosaženými reálnými produkty za předpokladu, že ekonomika realizuje jak zápornou, tak kladnou produkční mezeru. Pokud bude sledován reálný produkt v čase, půjde ve většině ekonomik o nepravidelně rostoucí křivku. V takovém případě je vždy žádoucí zjistit například pomocí klouzavých průměrů jaký je základního trend vývoje. Ten může být lineární, pod proporcionalní (konvexní) nebo i v určité části nad proporcionalní (konkávní). Typ trendu je potřeba odhadnout na základě již provedených měření či odvodit z jiných souvislostí.

Vlastní výpočet odhadu potenciálního produktu pomocí Hodrick-Prescottova filtru má tu výhodu, že si pomocí příslušného parametru může volit trend mezi lineárním až splývajícím s naměřenými hodnotami. Výpočetně jde o nepříliš komplikovanou ekonometrickou operaci, která není náročná na vstupní data. Hodrick-Prescottův filtr (dále jen HP) má různé modifikace. V této kapitole bude použita logaritmická verze tohoto filtru, která je dána výrazem (Hájek, Bezděk, 2000).

$$\text{Min} \left\{ \sum_{t=1}^T (\ln Y_t - \ln Y_t^*)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(\ln Y_{t+1}^* - \ln Y_t^*) - (\ln Y_t^* - \ln Y_{t-1}^*)] \right\} \quad (103)$$

Y značí skutečný produkt, Y^* je potenciální produkt, λ je parametr určující stupeň trendového vyhlazení. Pokud je parametr $\lambda = 0$ je potenciální produkt roven skutečnému HDP, pro $\lambda \rightarrow \infty$ bude trend lineární, tj. zobrazí se jako přímka. Parametr vyjadřuje minimalizaci rozdílů klouzavých průměrů mezi skutečným vývojem a vypočtenou trendovou složkou, λ snižuje variabilitu trendové složky, což znamená, že výstup filtru bude mít hladší průběh (Křivý, 2012).

Doporučená hodnota používaná při rozkladu makroekonomických časových řad bývá pro čtvrtletí rovna 1600, pro roční cykly 100 a pro pololetní cykly 700 (na podmínky České republiky toto vyhlazení použili také Hájek a Bezděk, 2000). Naproti tomu autoři (Bezděk, Dybczak, Krejdl, 2003) kvůli strukturálním zlomům ovlivňujícím předchozí i následující sledování k vyhlazení čtvrtletních dat použili hodnotu 480. Dle jejich další studie je vhodná hodnota pro analýzu produktu v ČR rovna 110. Tato hodnota se nejvíce přibližuje ideálním hodnotám podílu druhých mocnin rozptylu cyklické složky a rozptylu tempa růstu trendové složky (Tráge, 2011). Odhad potenciálního produktu je proveden ve všech případech pomocí uvedeného HP filtru. Při jeho použití není nutné použít jiné faktory (např. spotřebitelské ceny či dovozní ceny), které často nejsou statisticky podchyceny (Jašová, 2016).

Výhody HP filtru podle (Hájek, Bezděk, 2000) jsou:

- Absolutní minimalizace vstupních dat, které se redukují na jedinou proměnnou, kterou je reálné HDP ve stálých cenách.
- Snadná aplikace, transparentnost i snadná interpretace výsledků.

Nevýhody HP filtru podle (Hájek, Bezděk, 2000) jsou:

- Musí se řešit problematika nastavení vyhlazovacího parametru λ , pro což není žádné jednoznačné kritérium jeho stanovení.
- Je třeba připustit možnost vychýlení odhadů na začátku stejně tak jako na konci časové řady, a to zejména pokud začátek a konec časové řady nezachycuje podobné místo v hospodářském cyklu.
- Na rozdíl od některých jiných metod HP filtr nezachycuje strukturální změny v ekonomice.

9.3 Použité datové zdroje

Před propočtem odhadů potenciálního produktu bude nejdříve ověřována stacionarita výchozích časových řad. Stacionarita publikovaných objemových indexů znamená, že je její rozdělení pravděpodobnosti v čase neměnné a nezávislé a zároveň relevantní v rámci ekonometrického modelu. O dynamických modelech ekonomických časových řad se předpokládá, že jsou konstruovány z pozorování ekonomických veličin, která vyhovují požadavku stacionarnosti (Hušek, 2007).

Ke zpracování této kapitoly byly čerpány informace a data z Českého statistického úřadu (ČSÚ). Následně byla získaná data rozdělena do několika odvětví, která jsou

zdroji celkové hrubé přidané hodnoty ČR. Jedná se o následujících 10 odvětví (ČSÚ, 2019):

1. Zemědělství, lesnictví a rybářství.
2. Průmysl, těžba a dobývání.
3. Stavebnictví.
4. Obchod, doprava, ubytování a pohostinství.
5. Informační a komunikační činnosti.
6. Peněžnictví a pojišťovnictví.
7. Činnosti v oblasti nemovitostí.
8. Profesní, vědecké, technické a administrativní činnosti.
9. Veřejná správa a obrana, vzdělávání, zdravotní a sociální péče.
10. Ostatní činnosti.

Vývoj hrubé přidané hodnoty je podstatný pro následný výpočet a analýzu potenciálního produktu a odpovídající produkční mezery.

9.4 Bližší specifikace dat a test na stacionaritu

Výchozí data z ČSÚ, byla rozdělena do jednotlivých kategorií. Všechny časové řady začínaly v 1. čtvrtletí roku 1997 a končily ve 2. čtvrtletí roku 2019. Každá časová řada vyjadřovala tzv. objemový index neboli index vývoje celkového objemu v dané kategorii. Jde tedy o meziroční index, který je též označován zkratkou SOPR = 100, tj. stejné období předchozího roku se rovná 100. Vše co je nad 100, znamená růst, vše co je pod 100, znamená pokles oproti stejnému období předchozího roku (Statistika&My, 2015).

Vývoj časových řad všech 10 odvětví je na první pohled dosti rozmanitý, nedá se např. říct, že v době ekonomické konjunktury všechny objemové indexy byly nad 100 a naopak během recesí byly všechny pod 100. Je však pravda, že většina indexů časových řad takto ve skutečnosti probíhala. V prvním kroku byl proveden převod objemových indexů na %, neboť tak lépe vynikne růst (kladné číslo) respektive pokles (záporné číslo).

Hrubá přidaná hodnota (HPH), která do jisté míry kopíruje trend vývoje hrubého domácího produktu, klesá v prvních 6. čtvrtletích analyzované časové řady, načež vykazuje růst až do ekonomické krize v roce 2009. Vrchol se nacházel v 1. čtvrtletí 2006 (hodnota 8,4 %), naopak dno se nachází ve 3. čtvrtletí 2009 (hodnota -6,4 %). Po krizi následuje mírný vzestup a pak v letech 2012 a 2013 mírný pokles. V posledních 6 letech jsou hodnoty HPH v kladných číslech (v rozmezí od 1,4 až po 5,0 %).

Ve všech použitých časových řadách byl proveden test na stacionaritu. Tento test byl aplikován pomocí rozšířeného Dickey-Fullerova testu. Aby byly časové řady stacionární, tj. časová řada nepřetržitě neroste nebo případně neklesá, musí být p-hodnota vždy menší nebo rovna 0,10, a to se podařilo u všech odvětví, výjimkou byla jen časová řada celkové hrubé přidané hodnoty, avšak při aplikaci zpoždění byla nakonec i tato časová řada stacionární viz tabulka 11.

Tabulka 11: Test na stacionaritu HPH

| | | Zemědělství, lesnictví a rybářství | Průmysl, těžba a dobývání | Stavebnictví | Obchod, doprava, ubytování a pohostinství | Informační a komunikační činnosti | Peněžnictví a pojišťovnictví | Činnosti v oblasti nemovitosti | Profesní, vědecké, technické a administra- tivní činnosti | Veřejná správa a obrana, vzdělávání, zdravotní a sociální péče | Ostatní činnosti | Hrubá přidaná hodnota | HPH - zpoždění o 1 |
|--------------|----------------------|--|---------------------------------|--------------|--|---|---------------------------------|--------------------------------------|---|--|---------------------|-----------------------------|--------------------------|
| | p. hodnota | 0,001228 | 0,02799 | 0,001119 | 0,001375 | 0,005798 | 0,002567 | 0,0007848 | 0,006365 | 0,0001444 | 0,07204 | 0,1609 | 0,0198 |
| stacionarita | testovací statistika | -4,17838 | -3,12851 | -4,20621 | -4,14455 | -3,69075 | -3,95299 | -4,31075 | -3,65965 | -4,7871 | -2,73593 | -2,34363 | -3,20382 |
| | odhadovaná hodnota | -0,327103 | 0,201327 | -0,331827 | -0,320545 | -0,249442 | -0,304311 | -0,315621 | -0,25556 | -0,395787 | -0,16297 | -0,11298 | -0,15099 |
| | 0,1 stacionární? | ANO | ANO | ANO | ANO | ANO | ANO | ANO | ANO | ANO | ANO | NE | ANO |

Zdroj: https://www.czso.cz/csu/czso/hdp_cr; Gretl; vlastní výpočet

9.5 Výpočet potenciálního produktu

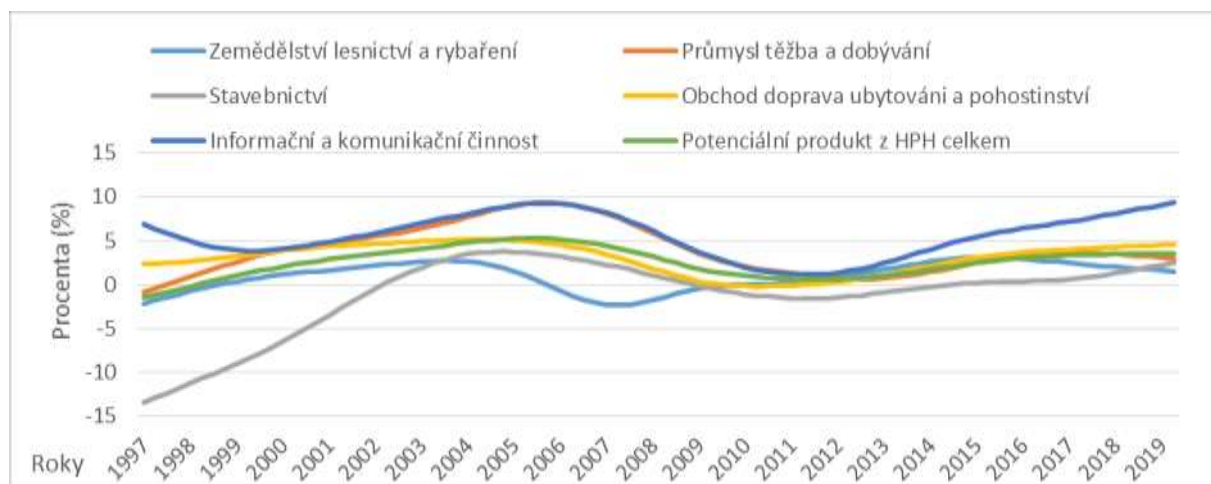
HP filtr byl aplikován s $\lambda = 1600$, neboť použijeme časové řady se čtvrtletními údaji. Pomocí HP filtru byl zjištěn kvartální vyhlazený potenciální produkt na základě hrubé přidané hodnoty v jednotlivých odvětvích. Časová řada potenciálního produktu u **zemědělství, lesnictví a rybářství** začíná zápornými čísly v roce 1997 a každým následujícím čtvrtletím roste, až dosáhne vrcholu v roce 2003. Po dosažení vrcholu hodnoty klesají a dna dosáhnou v roce 2007 (hodnota -2,4 %), což zjevně souvisí s působením orkánu Kyrill, který způsobil značné škody na rozsáhlých lesích porostech. Následující vrchol je v roce 2015 (hodnota 3,1 %), od té doby mírně klesá. Tato časová řada nekoresponduje s trendem ekonomiky jako celku ani s ostatními odvětvími. Dno v roce 2007 v grafu 1 vyčnívá nad trendem ostatních odvětví.

Počáteční vývoj byl obdobný i u odvětví **průmysl, těžba a dobývání**, které se z hodnoty -0,8 % postupně dostává až na hodnotu 9,4 % v posledním čtvrtletí roku 2005. Výkon tohoto odvětví na to klesá, nejvýrazněji během ekonomické krize v roce 2009, avšak pád pokračuje až do mírné recese v roce 2012, nikdy však nedosáhne záporných hodnot (minimum je 0,6 %). Druhý vrchol nastal v 2. kvartálu 2017, v posledních obdobích pak mírně klesá. **Stavebnictví** se na začátku sledovaného období pohybovalo v nejhorších číslech ze všech odvětví (hodnota -13,4 % je na začátku roku 1997), o to výraznější však byl jeho následný vzrůst a tento trend se zastavil až v posledním čtvrtletí roku 2004 na 3,8 %. Trend byl poté postupně klesající až do roku 2011 a na to opět rostl až do současnosti. U odvětví stavebnictví lze pozorovat, že jeho vývoj je zpomalený, což je vidět například v letech 2012 až 2014, kdy u všech odvětví již docházelo k růstu po recesi, jediné stavebnictví se však stále nacházelo v negativních číslech.

Dalším analyzovaným odvětvím je **obchod, doprava, ubytování a pohostinství**. To jako jedno z mála začíná v roce 1997 kladně a kladné zůstává až do roku 2009. Po slabých záporných číslech v roce 2010 odvětví stabilně roste a stále ještě nedosáhlo svého vrcholu na konci sledované časové řady. Důvodů, proč toto odvětví s malou výjimkou stále roste, je více. Těmi hlavními je stále intenzivnější globalizace a expandující turismus. Jediné odvětví, které vykazuje po celou sledovanou dobu nárůst, jsou **informační a komunikační činnosti**. V roce 1997 začínalo na hodnotě 6,9 %, pak s mírnými oscilacemi odvětví dosáhlo dna v roce 2011, ale hodnota byla stále kladná (1,1 %). Od té doby opět roste a poslední dostupný údaj vykazuje hodnotu 9,3

% . Toto odvětví je stále rostoucí, neboť intenzivnímu vývoji založením na nepřetržitých inovacích. Lidé pracující v tomto odvětví jsou jedni z nejlépe placených na trhu práce. **Celkový potenciální produkt z hrubé přidané hodnoty** v roce 1997 začíná na hodnotě -1,4 % a postupně roste až do 3. kvartálu 2005 na hodnotu 5,3 %. Pak klesá, až dosáhne dna s hodnotou 0,6 % během 3. kvartálu 2011. Od té doby opět konstantně roste, v posledních několika kvartálech je vidět zpomalení trendu růstu a hodnota se ustaluje na 3,5 % (viz obrázek 24).

Obrázek 24: Potenciální produkt pěti odvětví a celkového potenciálního produktu



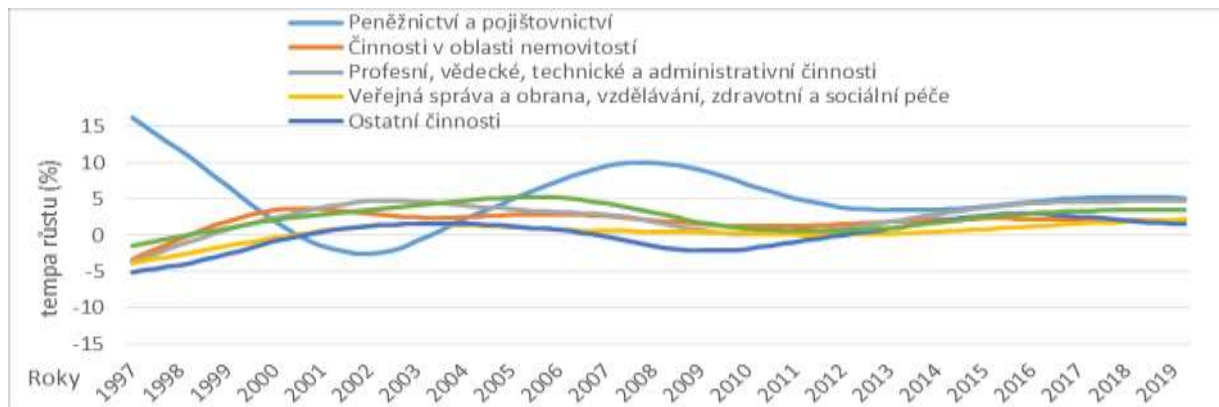
Zdroj: vlastní výpočet na podkladě dat z ČSÚ: https://www.czso.cz/csu/czso/hdp_cr

Poněkud turbulentní vývoj je zaznamenán u **peněžnictví a pojišťovnictví**. Časová řada tohoto odvětví začíná velmi vysoko (na hodnotě 16,2 %), a jeho vývoj klesá do roku 2002 o 18,8 p.b. Poté roste a opět do dvouciferných hodnot. Během krize klesá, ale už ne tak výrazně a ani následný růst není tak vysoký (viz obrázek 25). Zpočátku výrazný vývoj tohoto odvětví je zapříčiněn ještě důsledky před rokem 1997, a souvisí s transformací ekonomiky na liberální, kdy docházelo ke vstupu mnoha nových subjektů na trh a rostoucí poptávkou po jejich produktech ze strany klientů. Vývoj **činností v oblasti nemovitostí** začíná na hodnotě -3,3 %, jeho trend byl však rostoucí a dosáhl vrcholu v 3. čtvrtletí 2000. Vývoj pak mírně klesl a ustálil se na hodnotách od 1,2 do 2,9 % a nevykazoval žádné výrazné výkyvy po celý zbytek sledovaného období. Trh s nemovitostmi byl omezen pomalou výstavbou nových bytů, proto období konjunktury a recese zde nemá výrazný vliv.

Vývoj odvětví **profesní, vědecké, technické a administrativní činnosti** začal podobně jako oblast nemovitostí vzestupem, vrcholu však dosáhlo až v roce 2008 na 4,8 %. Výrazněji se tu však projevila jak ekonomická krize roku 2009 (dno s hodnotou 0,1 %), tak i následný vzestup. I na toto odvětví nemá ekonomický vývoj výrazný vliv, avšak je to odvětví, které je závislé na příspěvcích od státu, a ten v období recese musí omezit financování i v tomto oboru. **Veřejná správa a obrana, vzdělávání, zdravotní a sociální péče** taktéž začíná zápornými hodnotami a následným rostoucím vývojem. Vrchol byl dosažen v 1. pololetí roku 2003 (1,6 %), načež velmi pozvolna klesá do roku 2011. V posledních letech je rostoucí vývoj tohoto odvětví výraznější. Je to odvětví, které zahrnuje základní lidské potřeby a je nejvíce vázáno na státní rozpočet, tudíž si stát jeho dynamický vývoj nemůže dovolit. Posledním odvětvím jsou **ostatní činnosti**, které

začíná z hodnoty -5,1 % růstem až na 1,6 % v roce 2003. Postupně se dostává do negativních hodnot a pokles se ustálí až ve 2. čtvrtletí 2009, což je nejnižší hodnota zaznamenaná během ekonomické krize ze všech odvětví. Po krizi nastává opět růst na hodnotu 3 % na přelomu let 2015 a 2016 a od té doby mírně klesá.

Obrázek 25: Potenciální produkt ostatních 5 odvětví

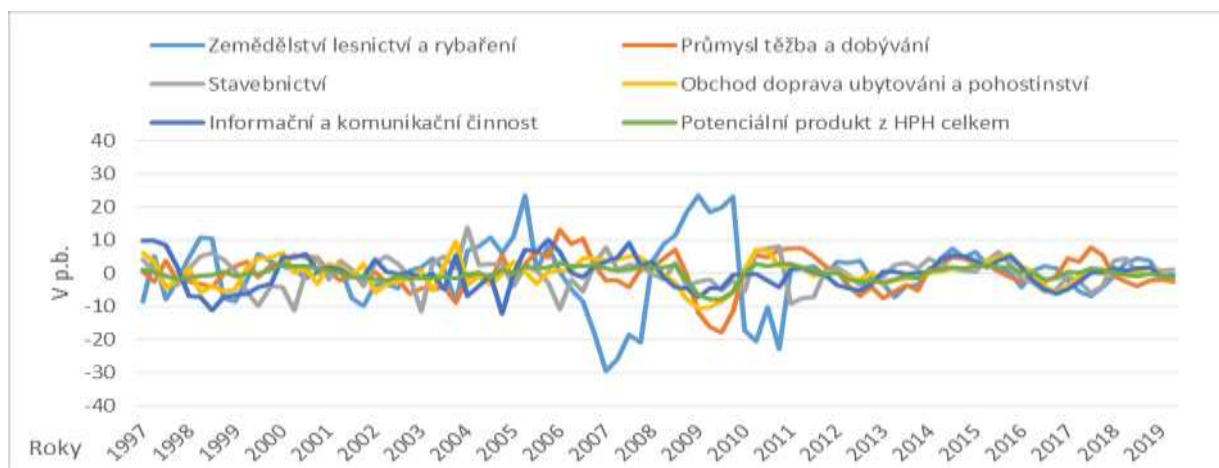


Zdroj: vlastní výpočet na podkladě dat z ČSÚ: https://www.czso.cz/csu/czso/hdp_cr

Pomocí HP filtru byl určen rovněž vývoj fází potenciálního produktu, tj. v jakém období byl pozitivní či negativní „gap“, tj. produkční mezera. Produkční mezera je vyjádřena v procentních bodech (p.b.). Pokud je hodnota pro dané čtvrtletí pozitivní, indikuje to kladnou produkční mezera neboli konjunkturu a naopak hodnota negativní indikuje období záporné produkční mezery a jedná se o období recese. Všeobecně jsou hodnoty produkční mezery ve všech časových řadách kolísavé a tedy těžko interpretované. Přesto z nich lze vysledovat určitý trend, ať už jde o trend jednotlivých odvětví, nebo o trend celé ekonomiky.

Odvětví **zemědělství, lesnictví a rybařství** je kolísavější a jak již bylo zmíněno, také nekopíruje všeobecný trend ostatních odvětví. Výraznou konjunkturu zaznamenalo v roce 2005, výraznou recesi v roce 2007 (dno v 1. čtvrtletí s hodnotou téměř -30 p.b.) Následuje déle trvající konjunktura v roce 2009 a opět další recesi v celém roce 2010 (viz obrázek 26).

Obrázek 26: Produkční mezera 5 odvětví a celkového potenciálního produktu z HPH

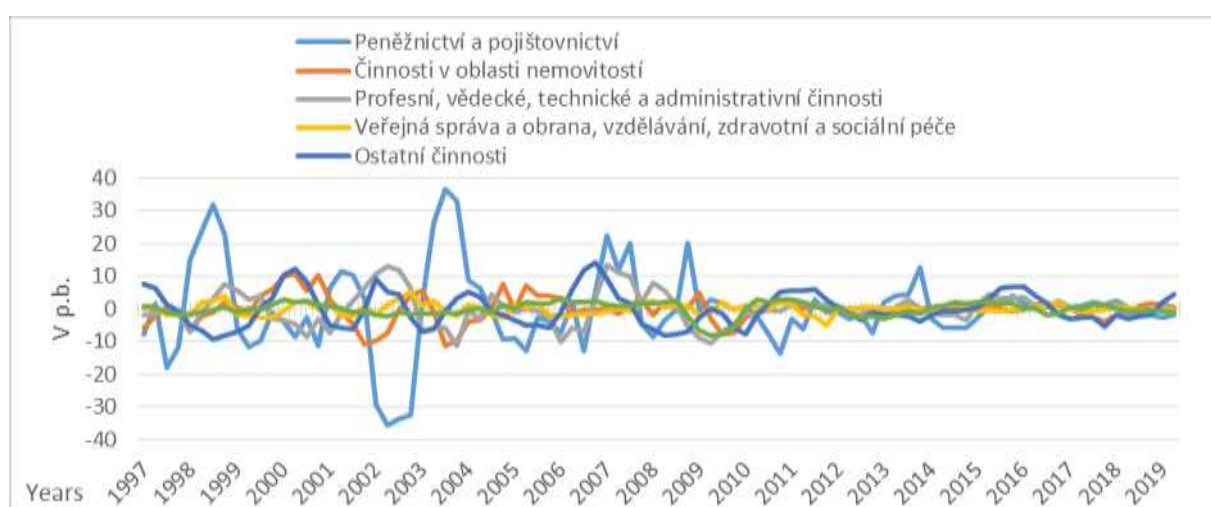


Zdroj: vlastní výpočet na podkladě dat z ČSÚ: https://www.czso.cz/csu/czso/hdp_cr

Další odvětví s výrazným kolísáním je **peněžnictví a pojišťovnictví**, které zaznamenalo vysokou konjunkturu v roce 1998, nato recesi v roce 2002 (dno ve 2. čtvrtletí s hodnotou -35,4 p.b.), po té vykázalo výraznou konjunkturou v roce 2003 (vrchol ve 3. čtvrtletí s hodnotou 36,5 p.b.) Další větší konjunktury nastaly v roce 2007 a 2013 (viz obrázek 27).

Pokud spojíme data všech odvětví a snažíme se nalézt nějaké podobnosti ve vývoji, pak lze zaznamenat nejvíce odvětví s konjunkturou v letech 2000, 2005 a 2015, naopak recese byla nejčastěji v letech 1999, 2009 a 2013. V posledních dvou sledovaných čtvrtletích (první polovina roku 2019) jsou ve fázi konjunktury stavebnictví, činnosti v oblasti nemovitostí a ostatní činnosti. Ostatní odvětví jsou dle vývoje produkční mezery v recesi.

Obrázek 27: Produkční mezera ostatních 5 odvětví



Zdroj: vlastní výpočet na podkladě dat z ČSÚ: https://www.czso.cz/csu/czso/hdp_cr

Účelem této kapitoly bylo získat pomocí aplikace HP filtru nástroj pro vzájemné porovnávání vývoje odvětví především co do trendu vyjádřeného vývoj potenciálního produktu. Ukázalo se, že většina odvětví kopíruje trend vývoje celkového HPH. Za hodnotné lze považovat zjištění, která odvětví jsou ve svém vývoji citlivá na finanční krizi, případně zda jsou spíše sezónní povahy či reagují na jiné jevy obecnější povahy.

Odvětví **zemědělství, lesnictví a rybaření** dosáhlo dna nikoliv během ekonomické krize, ale při živelné pohromě Kiril. **Stavebnictví** se zpočátku velmi nedařilo, načež se vývoj stabilizoval. **Průmysl, těžba a dobývání** nezaznamenalo pokles od roku 1998, a to ani během ekonomické krize. Pouze s drobným poklesem během krize se potýkalo odvětví **obchod, doprava, ubytování a pohostinství**. Nejvíce konstantním růstu vykazují **informační a komunikační činnosti**. Zpočátku vysoký růst **peněžnictví a pojišťovnictví** byl zapříčiněn důsledky před rokem 1997 a vstupem nových subjektů na trh. Období celkové konjunktury i recese nemá výrazný vliv na vývoj **činnosti v oblasti nemovitostí**. Podobně je na tom odvětví **profesní, vědecké, technické a administrativní činnosti**, i když toto odvětví je závislé na státním financování. Odvětví **veřejná správa a obrana, vzdělávání, zdravotní a sociální péče** zahrnuje základní lidské potřeby, tudíž případný výraznější pokles si stát nemůže dovolit. **Celkový potenciální produkt z hrubé přidané hodnoty** kopíruje trend vývoje HDP. Důležitý

je také vývoj jednotlivých fází potenciálního produktu, tzv. produkční mezera. Vývoj produkční mezery je velmi kolísavý, což svědčí o dynamické stabilitě. Výsledkem je zjištění, že nejvyšší konjunktura při zprůměrování vývoje u jednotlivých odvětví probíhala v letech 2000, 2005 a 2015 a recese v letech 1999, 2009 a 2013.

10 Míra nezaměstnanosti neakcelerující inflaci

Národohospodářské produkční funkce nejčastěji pracují se závisle proměnnou v podobě reálného HDP. Vysvětlovanými proměnnými jsou nejčastěji práce (počet obyvatel, aktivních obyvatel nebo počtu odpracovaných hodin), kapitál i některé další⁶⁴ výrobní faktory jako půda, materiály, know-how apod.

Tato kapitola se zabývá nejvýznamnějším výrobním faktorem, kterým je práce. Optimální využití pracovního kapitálu, tj. skutečných schopností lidí je patrně největším ekonomickým zdrojem vůbec. Člověk má ústřední postavení mimo jiné proto, že disponuje intelektem a tudíž ovlivňuje všechny ostatní výrobní faktory. Jestliže všechny výrobní faktory jsou nějakým způsobem omezeny, tak člověk má téměř nevyčerpatelné možnosti vlastního zdokonalování. V této kapitole bude věnována pozornost především nezaměstnanosti, tj. stupněm využití výrobního faktoru práce. Konkrétně bude analyzován vývoj míry nezaměstnanosti neakcelerující inflaci (Non-Accelerating Inflation Rate of Unemployment – dále jen NAIRU). Další charakteristikou, jejíž vývoj bude sledován je mezera nezaměstnanosti (MN).

Údaje o dlouhodobé míře nezaměstnanosti byly čerpány z Českého statistického úřadu (ČSÚ) a Ministerstva práce a sociálních věcí (MPSV). Samotné hodnoty pak byly odhadnuty pomocí ekonometrického programu Gretl. Cílem propočtů je zhodnotit vývoj míry nezaměstnanosti v České republice pomocí ekonometrických nástrojů, neboť nízká nezaměstnanost ovlivňuje rovněž míru inflace, která je vyšší, než je evropský průměr. Oba sledované makroekonomické ukazatele se výrazně podílí na souhrnném ekonomickém cyklu státu. Součástí propočtů je rovněž na základě dat z minulých let analyzovat vývoj strukturální nezaměstnanosti, a to ze dvou zdrojů a vysvětlit jednotlivé fáze míry nezaměstnanosti v ČR.

Nejdříve je zkoumán vliv ukazatelů analýzy na nezaměstnanost. Představeny budou použité metody včetně jejich výhod a nevýhod. Nechybí vymezení základních ekonometrických pojmů, které souvisí se zpracovanou tematikou. Analýza vychází z náležité teorie, avšak opírá se rovněž o empirický výzkum. Vše směřuje k vysvětlení průběhu časových řad, které byly použity k testování. Doplněny jsou též informace o použité databázi a charakteristice použitých dat a nakonec přehled ekonometrických testů.

Empirická část je rozdělena do dvou subkapitol. V první jsou analyzována původní data z ČSÚ a MPSV, na nichž byly provedeny testy na stacionaritu u jednotlivých časových řad. V druhé subkapitole byl aplikován HP filtr, pomocí kterého byl zjištěn vývoj NAIRU a MN.

Závěr této kapitoly shrnuje výsledky a objasnění empirické části, a je zde uvedena interpretace výsledků analýzy vývoje míry nezaměstnanosti.

⁶⁴ To řeší např. multifaktorová souhrnná produktivita faktorů, jejíž empirickou aplikací je produkční funkce KLEM, viz např. (Klavec, Vopravil, 2008).

10.1 Míra nezaměstnanosti

Základním ukazatelem této kapitoly je NAIRU, který metodicky souvisí s původní substituční Phillipsovou křivkou. NAIRU je taková míra nezaměstnanosti, která nemění tempo růstu míry inflace a představuje rovnováhu na trhu práce. Jde o jiné vyjádření často používané přirozené míry nezaměstnanosti (Yglesias, 2014). Vymezení NAIRU však není triviální. Rozlišují se totiž tři nejčastější odhady NAIRU, viz např. (Richardson, 2000).

Krátkodobé NAIRU je taková míra nezaměstnanosti, při které je možné současnou míru inflace zafixovat i pro následující období. To ovšem znamená, že taková míra nezaměstnanosti, a tedy NAIRU, je poměrně dosti variabilní, protože je pod vlivem všech nabídkových šoků a setrvačnosti inflace. To, čím se zpravidla rozumí NAIRU, je tzv. střednědobé NAIRU. Jedná se o rovnovážnou hodnotu, ke které směřuje skutečná míra nezaměstnanosti při odeznění přechodných nabídkových šoků a přizpůsobení skutečné míry inflace své očekávané hodnotě. Dlouhodobé NAIRU je rovnovážná míra nezaměstnanosti, ke které systém směřuje po odeznění všech nabídkových (a jiných) šoků, včetně těch, které mají na ekonomiku dlouhodobý dopad. Vedle (Pošta, 2008) sem patří např. (Richardson, 2000) a (Szeto, Guy, 2004).

Ekonomové tuto v podstatě imaginární proměnnou představují jako “rovnovážné” nebo “očekávané” hodnoty zkoumaných veličin, které se snaží odhadovat (Boone, 2000). Odchylka nezaměstnanosti od přirozené míry nezaměstnanosti jsou základním stavebním kamenem měnové politiky (Estrada, Hernando a López-Salido, 2000). Autoři při své práci zjistili, že alternativní nástroje poskytují odlišné bodové odhady NAIRU a že se tyto odhady vyznačují vysokým stupněm nejistoty. P. McAdam a (McMorrow, 1999) považují využitelnost konceptu NAIRU při diskuzích makroekonomické politiky za omezenou.

Při propočtu NAIRU používáme pět variant (Jašová, 2010), čímž získáme alternativní pohled na vývoj NAIRU a mezery nezaměstnanosti. První variantou analýzy vztahu mezi mírou nezaměstnaností a inflací je tzv. Jednorovnicový model, který odhaduje pro celé sledované období pouze jednu hodnotu NAIRU. Touto metodou je NAIRU definováno jako úroveň nezaměstnanosti, která je konzistentní s Phillipsovou křivkou rozšířenou o stabilní očekávání. Nejrozšířenější variantou je Gordonův „*Triangle Model*“ (Gordon, 1997) s předpokladem, že míra inflace závisí na trojici základních faktorů, a to na očekávané inflaci, poptávkových podmínkách aproximovaných gapem nezaměstnanosti a šocích na nabídkové straně. Druhou variantou identifikace NAIRU je HP filtr (Fabiani, Mestre, 2000). Využití HP filtru (Hodrick-Prescottův filtr) je založeno na myšlence substituce skutečné nezaměstnanosti úrovní vyhlazeného trendu prostřednictvím výběru hodnoty koeficientu λ . Další tři varianty tvoří jednak propočet NAIRU pomocí Break modelu (S. Fabiani a R. Mestre, 2000), dále varianta odhadu NAIRU podle Kalmanova filtru (Richardson, Boone, Giorno, Meacci, Rae, Turner, 2000), a nakonec pátá varianta, kde bylo využito zprůměrnování hodnot NAIRU odhadnutých celou sadou metod.

10.2 Použitý Hodrick-Prescottův filtr

Základním úkolem Hodrick-Prescottova filtru je rozložení časové řady na trendovou a cyklickou složku. V tomto směru jde o analogii se stanovením potenciálního produktu, která byla řešena v přechodí kapitole. HP filtr má celou řadu podob. V této kapitole je využita logaritmická forma, která je založena na minimalizaci následujícího výrazu:

$$\{y_t^g\}_{t=0}^{T+1} = \arg \min \sum_{t=1}^T (y - y_t^g)^2 + \lambda \cdot [(y_{t+1}^g - y_t^g) - (y_t^g - y_{t-1}^g)]^2, f \quad (104)$$

kde, λ je parametr filtru a y_t^g je té-tý člen filtrované řady. V podstatě se principiálně jedná o minimalizaci rozdílů klouzavých průměrů mezi skutečným vývojem časové řady a vypočtenou tendenční složkou, λ snižuje variabilitu trendové složky, což znamená, že výstup filtru bude mít hladší průběh. Ideální hodnota užívaná při rozkladu makroekonomických časových řad je pro čtvrtletí uváděna ve výši 1600, pro roční cykly se doporučuje 100 a pro pololetní cykly se doporučuje hodnota 700, viz např. (Hájek, Bezděk, 2000). Autoři (Bezděk, Dybczak, Krejdl, 2003) uvádějí kvůli strukturálním zlomům ovlivňujícím předchozí i následující průběh, že k vyhlazení čtvrtletních dat použili hodnotu parametru vyhlazení 480. Tato hodnota se nejvíce přibližuje ideálním hodnotám podílu druhých mocnin rozptylu cyklické složky a rozptylu tempa růstu trendové složky (Tráge, 2011).

Odhad NAIRU je v tomto příspěvku proveden vždy pomocí HP filtru. Při jeho použití není nutné použít jiné faktory (jako např. spotřebitelské a dovozní ceny), které nejsou pro analyzované sektory, NUTS, pohlaví a věkové kategorie statisticky podchyceny (Jašová, 2016).

Výhody HP filtru jsou podle Jašové:

- Datová nenáročnost.
- Jednoduchost a transparentnost.
- Velmi dobrá interpretace.

Nevýhody HP filtru podle (Hájek, Bezděk 2000) jsou:

- Neexistence univerzálně aplikovatelné hodnoty λ
- Možnost vychýlení odhadů na začátku či na konci řady
- Na rozdíl od jiných metod HP filtr nezachycuje strukturální změny v ekonomice

Ryze statistické modely pracují obvykle pouze se skutečnou mírou nezaměstnanosti a s použitím zvoleného filtru (často používaný HP filtr) odhadují trend, jež je považován za hledané NAIRU. Výhodou je samozřejmě snadnost a rychlost propočtu. Mezi nevýhody patří subjektivita ohledně parametrů daného filtru, které je potřeba zvolit, a filtry, které pomalu vstřebávají významné změny nezaměstnanosti, které mohou mít strukturální povahu. Obecně platí, že tento přístup znemožňuje využití jakýchkoliv ekonomických úvah (Hráčková, 2015).

10.3 Výchozí zdroje dat

Před vlastní aplikací nástrojů k odhadům nezaměstnanosti je nutno ověřit stacionaritu výchozích časových řad. Stacionarita publikovaných měř nezaměstnanosti znamená, že je její rozdělení pravděpodobnosti v čase neměnné a nezávislé a zároveň relevantní v rámci ekonometrického modelu.

Ke zpracování práce byly použity dva zdroje dat míry nezaměstnanosti:

- Český statistický úřad (ČSÚ) – který publikuje tzv. obecnou míru nezaměstnanosti (OMN);
- Ministerstvo práce a sociálních věcí (MPSV) – které zveřejňuje tzv. podíl nezaměstnaných osob (PNO).

Obecná míra nezaměstnanosti osob ve věku 15 až 64 let představuje podíl nezaměstnaných k pracovní síle, tj. součtu zaměstnaných a nezaměstnaných. Naopak podíl nezaměstnaných osob značí podíl počtu dosažitelných uchazečů o zaměstnání ve věku 15 až 64 let a celkového počtu obyvatel ve stejné věkové kategorii (ČSÚ, 2018).

10.4 Testy na stacionaritu

Časová řada OMN dle ČSÚ začíná 1. lednem 1993 a poskytuje údaje o míře nezaměstnanosti v procentech pro každý kvartál až do 2. kvartálu 2019. V každém kvartálu rovněž databáze obsahuje údaje o rozdělení míry nezaměstnanosti podle pohlaví. Vývoj PNO začíná 1. kvartálem roku 1997 a končí 3. kvartálem 2019. Data jsou zde tak jako u OMN měřena v relativních číslech. Údaje o rozdělení míry nezaměstnanosti podle pohlaví jsou z tohoto zdroje dostupné teprve od roku 2004. Starší údaje ze stránek MPSV ČR bohužel nejsou dostupné. Naopak oproti ČSÚ vykazuje MPSV údaje o míře nezaměstnanosti měsíčně, avšak pro sladěnost a komparaci obou metod obsahuje naše databáze taktéž kvartální údaje.

OMN dosáhla svého vrcholu v 1. kvartále roku 2000, načež postupně mírně klesala až do ekonomické krize, která započala v roce 2008. Avšak ani během největší ekonomické recese nedosáhla OMN dvouciferných hodnot. Stav relativně vysoké OMN skončil po roce 2013, kdy se ekonomika zotavila z recese a nastala konjunktura. Situace na trhu práce je v současnosti rekordní – oficiální hodnota OMN za 2. kvartál 2019 činí 1,9 %. Zajímavé je srovnání OMN u mužů a žen, neboť zde můžeme pozorovat mírně odlišný vývoj v čase. Jednak je OMN u mužů v každém sledovaném období nižší než u žen, tak i vývoj hodnot je u mužů oproti ženám zpomalený. Tento jev je zkoumán v první části.

Druhá časová řada, vývoj PNO, vykazuje nejvyšší hodnotu v 1. kvartálu roku 2004, kdy činila 10,8 %, což je o 4 roky později než v případě OMN. Vývoj poklesu až na hodnoty kolem 5 % před krizí je obdobný, naopak nárůst po krizi je zde zřetelnější, až na 9,8 %. Poslední údaj pochází z 3. kvartálu 2019 s hodnotou 2,7 %. Při srovnání vývoje PNO u mužů a žen je jeden výrazný rozdíl oproti OMN - v některých kvartálech roku 2013 byl PNO vyšší u mužů než žen.

U všech těchto časových řad byl proveden test na stacionaritu. Tento test byl aplikován pomocí rozšířeného Dickey-Fullerova testu. Aby byly časové řady stacionární, tedy že

časová řada nepřetržitě neroste, případně neklesá, musí být p-hodnota vždy menší nebo rovna 0,10 a to se podařilo jen u celkové OMN, OMN mužů a PNO mužů.

Graf 2: Test na stacionaritě

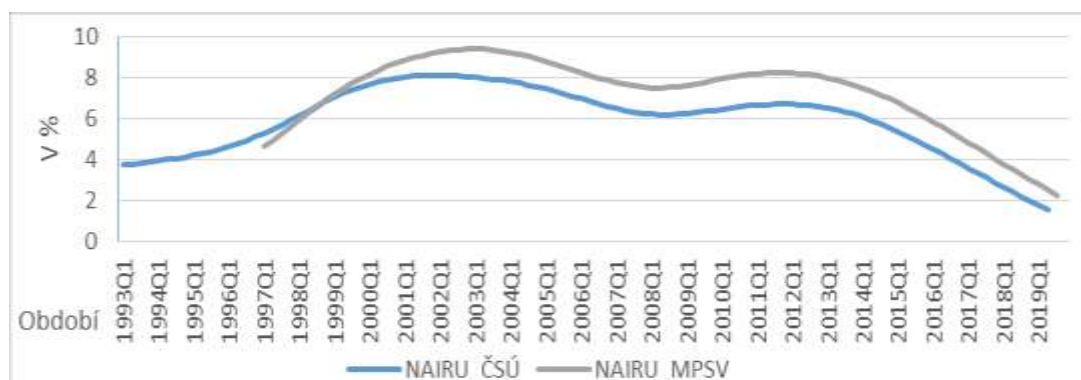
| | ČSÚ OMN (v %) | ženy ČSÚ OMN (v %) | muži ČSÚ OMN (v %) | MPSV PNO (v %) | ženy MPSV PNO (v %) | muži MPSV PNO (v %) |
|----------------------|---------------|--------------------|--------------------|----------------|---------------------|---------------------|
| p-hodnota | 0,08094 | 0,5145 | 0,04542 | 0,7939 | 0,8603 | 0,07745 |
| testovací statistika | -2,66106 | -1,53787 | -1,65519 | -0,884201 | -0,610286 | -2,6802 |
| odhadovaná hodnota | -0,0501537 | -0,0282077 | -0,051155 | -0,030426 | -0,0182807 | -0,104106 |
| stacionární | yes | no | yes | no | no | yes |

Zdroj: OMN: <https://vdb.czso.cz/vdbvo2/faces/cs/index.jsf?page=vystup-objekt&pvo=ZAM01-D>; PNO: <https://www.mpsv.cz/web/cz/mesicni>; vlastní výpočet

10.5 Využití HP filtru

V této části byl aplikován HP filtr, kde lambda činí 1600, neboť údaje v časových řadách jsou čtvrtletní. Pomocí HP filtru zjistíme NAIRU. Celkové NAIRU podle OMN na počátku roste z necelých 3,8 % v roce 1993 až na více než dvojnásobek (8,1 %) ve 4. kvartálu 2001. Tento nejvyšší vrchol je oproti vrcholu v časové řadě skutečně naměřené OMN opožděný o 6 kvartálů. Následně NAIRU klesá až do předkrizového období (3. kvartál 2008) na číslo 6,2 %. Ekonomická krize způsobila mírný nárůst NAIRU, avšak šlo pouze o navýšení na 6,7 % ve 4. kvartálu 2011. Po tomto čtvrtletí NAIRU vytrvale klesá až na 1,55 % na konci časové řady.

Obrázek 28: Celkové NAIRU podle OMN (z ČSÚ) a PNO (z MPSV)

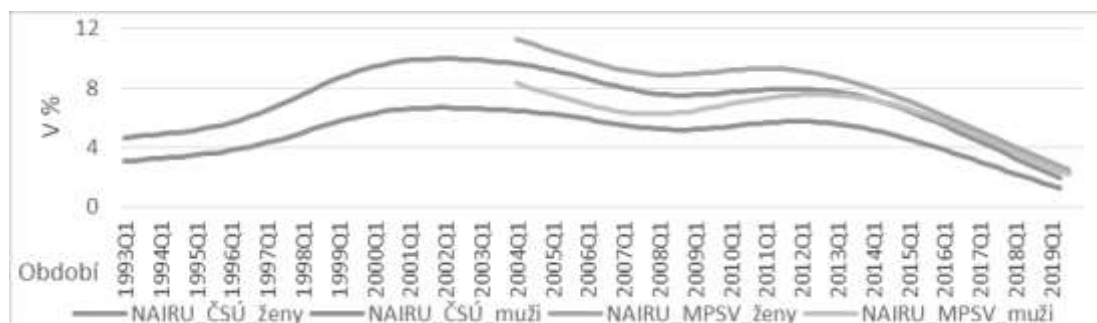


Zdroj: vlastní výpočet na podkladě dat OMN:
<https://vdb.czso.cz/vdbvo2/faces/cs/index.jsf?page=vystup-objekt&pvo=ZAM01-D>
 PNO: <https://www.mpsv.cz/web/cz/mesicni>

Celkové NAIRU podle PNO rovněž začíná růstem v roce 1997 a to až do 1. kvartálu 2003, kdy poskočilo ze 4,6 % na 9,4 %. Tempo růstu celkového NAIRU bylo u PNO vyšší než u OMN. Následný vývoj do i během krize byl stejný u PNO jako u OMN, načež po 4. kvartálu 2011 se NAIRU snižuje a to výraznějším tempem než u OMN (z 8,3 % na 2,2 % - viz obrázek 28).

Pro účely této práce je také zásadní vývoj NAIRU mužů a žen podle obou metodik. Kvůli absenci starších dat u MPSV vychází data jen z ČSÚ. Na počátku časové řady v roce 1993 byl rozdíl NAIRU mezi muži a ženami 1,6%. Ekonomické zpomalení na přelomu tisíciletí se u OMN projevoval více u žen než u mužů – ve 4. kvartálu 2001 činil rozdíl mezi pohlavími 3,3 %. Následný hospodářský růst opět způsobil ztenčování tohoto rozdílu, avšak stále byl více než 2% respektive 3% u PNO. Ekonomická krize v roce 2008 až 2012 a její zvýšení míry nezaměstnanosti však tímto sledovaným rozdílem již příliš nezahýbala u obou metodik. Naopak rozdíl se začal opětovně výrazněji ztenčovat v posledních letech – ve 2. kvartálu 2019 již rozdíl činil pouhých 0,7 % (viz obrázek 29).

Obrázek 29: NAIRU mužů a žen podle OMN (z ČSÚ) a PNO (z MPSV)



Zdroj dat: vlastní výpočet na podkladě dat OMN:

<https://vdb.czso.cz/vdbvo2/faces/cs/index.jsf?page=vystup-objekt&pvo=ZAM01-D>

PNO: <https://www.mpsv.cz/web/cz/mesicni>

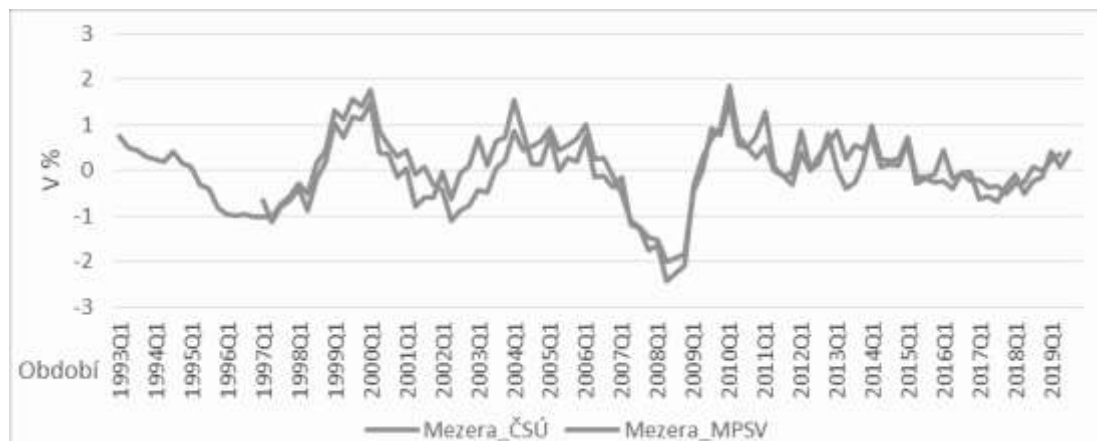
Z toho vyplývá, že během ekonomických recesí se ženy výrazněji podílí na zvýšení míry nezaměstnanosti než muži. Naopak v obdobích, kdy se ekonomice daří, je tento rozdíl mezi pohlavími minimální.

Pomocí HP filtru se určí rovněž vývoj fází ekonomického cyklu na trhu práce, tj. v jakém období byl pozitivní či negativní „gap“ neboli mezera nezaměstnanosti. MN je vyjádřena v procentních bodech, opět buď celková, nebo podle pohlaví. MN se spočítá tak, že od skutečné míry nezaměstnanosti se odečte NAIRU v daném období. Pokud je hodnota pro dané čtvrtletí negativní, byla konjunktura a naopak hodnota pozitivní znamená pokles ekonomické aktivity.

Celková MN začala klesat od roku 1993 do 1997, kdy vykazovala hodnoty kolem -1, viz obrázek 30. V rámci pohlaví se tato mezera více projevovала u žen (-1,4) než u mužů (-0,8), viz obrázek 31. Po krizi v roce 1997 byl skutečný nárůst míry nezaměstnanosti rychlejší než u NAIRU, tedy i mezera se otočila na kladná čísla. MN zde byla opět větší u žen (+2,1) než u mužů (+1,9). Následně došlo k drobné oscilaci na obě strany, až nastal rok 2008, kdy skutečná míra nezaměstnanosti se pravidelně snižovala, naopak NAIRU ještě zohledňuje vysoké hodnoty z předešlého období.

Celková mezera byla nepatrně nižší u PNO (-2,4) než u OMN (-2,0). Stabilizace po krizi znamená u MN otočení znamének, avšak plusové hodnoty nejsou tak vysoké, jako ty s mínusem. To je vysvětleno tím, že během ekonomické krize hospodářský vývoj klesá razantněji, než stoupá během konjunktury. Od 2. kvartálu roku 2011 po současnost nedochází k výrazným odchylkám – mezera nikdy nepřekročila hranici +/- 1.

Obrázek 30: Celková mezera nezaměstnanosti podle OMN (z ČSÚ) a PNO (z MPSV)

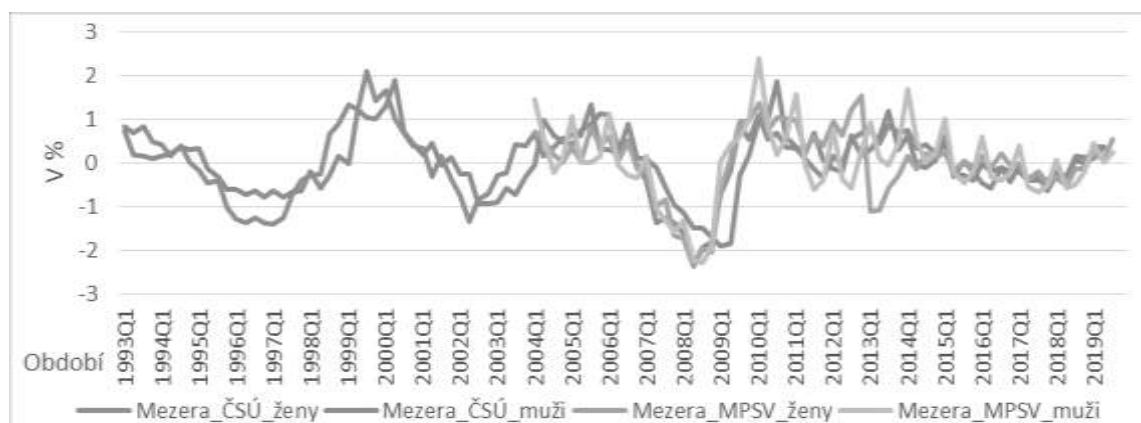


Zdroj dat: vlastní výpočet na podkladě dat OMN:

<https://vdb.czso.cz/vdbvo2/faces/cs/index.jsf?page=vystup-objekt&pvo=ZAM01-D>

PNO: <https://www.mpsv.cz/web/cz/mesicni>

Obrázek 31: Mezera nezaměstnanosti mužů a žen podle OMN (z ČSÚ) a PNO (z MPSV)



Zdroj dat: vlastní výpočet na podkladě dat OMN:

<https://vdb.czso.cz/vdbvo2/faces/cs/index.jsf?page=vystup-objekt&pvo=ZAM01-D>

PNO: <https://www.mpsv.cz/web/cz/mesicni>

Vývoj MN je podle obou metodik podobný, a ani u pohlaví nejsou zřetelné výrazné rozdíly, snad jen stojí za zmínku fakt, že vývoj MN u mužů oproti ženám je většinou opožděný o jeden kvartál. Tento rozdíl je na grafech níže vidět zejména během výrazných výkyvů před a po krizích. Vždy v předkrizovém období je hodnota MN nejnižší, naopak během krize nejvyšší.

Cílem této kapitoly bylo zhodnotit vývoj míry nezaměstnanosti v ČR podle metodik ČSÚ a MPSV pomocí NAIRU a mezery nezaměstnanosti. Na základě analýzy

historického vývoje míry nezaměstnanosti a zjištěných výsledků se závěr práce zabývá predikcí stavu a vývoje na trhu práce v nejbližší budoucnosti.

V empirické části byl nejprve aplikován HP filtr, pomocí kterého jsme zjistili vývoj NAIRU v ČR od roku 1993 po současnost podle OMN a podle PNO a u obou metodik jsme rovněž rozlišovali vývoj u žen a mužů. V celém sledovaném období bylo NAIRU u mužů nižší než u žen. Rozdíl mezi pohlavími se začal výrazně ztenčovat v posledních letech, v době rekordně nízké nezaměstnanosti. V období ekonomických recesí se ženy více podílí na zvýšení míry nezaměstnanosti než muži. Dále jsme zjistili vývoj MN, která vykazovala nejnižší hodnoty v předkrizových letech - 1996, 2002 a zejména pak v roce 2008. Naopak nejvyšší hodnoty byly změřeny těsně po krizích, zejména v letech 1999 a 2010. V poslední dekádě se vývoj MN stabilizoval - po ekonomické krizi v roce 2009 ani slabá recese v letech 2012 a 2013, která způsobila druhé menší dno u vývoje HDP, s vývojem MN příliš nezhýbala, pouze způsobila delší období kladné MN a ve vývoji NAIRU došlo ke krátkému zvýšení.

Přesto lze pozorovat jistý trend v posledním roce sledované časové řady. Do roku 2018 tento vývoj mírně klesal, načež od počátku roku 2019 začíná mírně stoupat. Dno MN sice není zdaleka tak výrazné jako v roce 2008, přesto to však znamená, že trh práce a s tím související ekonomická aktivita už dosáhla svého vrcholu a postupně slábne. Poslední čerstvá data o vývoji obou sledovaných měř nezaměstnanosti jsou sice stále nejnižší ve své historii, potvrzuje to i stále klesající NAIRU podle obou metodik, lze však předpokládat jejich postupný nárůst, tak jak nám to dokazují zkušenosti z minulosti.

11 Kvantová ekonomie

Ekonomie je optimalizační věda, hledající synergický efekt ve světě omezených zdrojů a stále rostoucích potřeb. Úkolem ekonomie tedy není stanovovat cíle rozvoje společnosti, nýbrž optimalizovat trajektorie dosažení společenských cílů z hlediska její ekonomické efektivity a účelnosti. Optimalizačních metod je mnoho, avšak ty nejpropracovanější a nejúčinnější mají sofistikovanou povahu. Tyto metody využívají k vymezení pojmů a zejména vzájemných vztahů mezi veličinami matematický aparát, který umožňuje vytvářet matematické modely představující nějakým způsobem zjednodušenou realitu. Matematické modely umožňují v rámci své vypovídací schopnosti, jak popis nějakého jednoduššího či komplikovaného systému, tak simulaci jeho chování v minulosti či v budoucnosti v podobě predikce nebo experimentování. To je zvláště významné ve společenských vědách, kde je obvykle experiment nereálný neboť nelze zajistit stálé podmínky tzv. *ceteris paribus*⁶⁵ nebo by takový experiment byl nehumánní, protože by vyžadoval nenáležitě manipulovat s lidmi.

Autoři jsou si vědomi, že kvantová fyzika je celá soustava fyzikálních teorií týkajících se především primárních částic. Název kvantová je podle autorů této monografie vhodný i pro určitou část ekonomie, neboť kvantová fyzika vychází z toho, že určité měřitelné veličiny se nemění spojitě (plynule), ale v násobcích určitého minimálního množství zvaného kvantum, které je dané Planckovou konstantou. Není pochyb o tom, že ekonomie se mnohdy ocitá v analogické situaci, neboť musí pracovat s určitými minimálními kvanty. Například pokud je lidský kapitál měřený počtem obyvatel či pracovníků, nelze počítat s polovinou či čtvrtinou člověka. Lze předpokládat, že kvantová ekonomie se bude projevovat při různých analýzách a zejména při experimentování. Vyjdeme ze situace, že chceme předvídat nebo třeba ovlivňovat určitý proces nebo nějakou veličinu, proto budeme hledat příčinné vztahy mezi závisle proměnnou představující důsledek a jednou nebo více nezávisle proměnnými, které by mohly být příčinami. Chceme totiž vytvořit matematický model, který by dovolil předvídat, jak se změna jedné (nebo i několika) nezávisle proměnné projeví na hodnotách závisle proměnné, kterou chceme znát či ovlivňovat. V experimentu nebo měření je tedy třeba zajistit, aby výsledek ovlivňovala jen jedna ze závisle proměnných, čili aby hodnoty všech ostatních zůstaly stejné. Podobná měření nebo experimenty můžeme v případně potřeby provést i pro další jiné nezávisle proměnné, ale vždycky s podmínkou, že se ty zbývající nemění. To je právě to, co vyjadřuje podmínka „*ceteris paribus*“.

Pro všechny tyto úlohy potřebujeme provádět měření, která vedou ke zjištění závislostí, které jsou často vyjadřovány pomocí matematických funkcí. Přesto, že se v ekonomii měří téměř výhradně diskrétně, tj. veličiny jsou vztaženy na výrobek, firmu, den, rok apod. vyjadřují se vzájemné vztahy většinou spojitými hladkými funkcemi⁶⁶. Např. produkční funkce vyjadřující zákon klesajících mezních výnosů jako konkávní funkci závislosti produktu (výstupu) na výrobních faktorech (vstupech) se dá vyjádřit

⁶⁵ Např. při zvýšení reálných mezd se *ceteris paribus* zvýší také spotřeba.

⁶⁶ Správně bychom tedy měli pracovat s diferencními rovnicemi, kde definičním oborem difference je tzv. diskrétní množina ekvidistantních bodů $(x_0 + nh)$, kde x_0 je dané číslo, $n = 1, 2, 3, \dots$ A $h > 0$ je libovolné číslo, zvané diferencní krok.

jako spojitá kvadratická funkce reálné proměnné. Tím nepřímo předpokládáme, že daný výrobní faktor (vstup) lze dávkovat libovolným způsobem stejně tak jako výstupy. Pokud budeme zvažovat pro zjednodušení pouze jediný souhrnný výstup y a jediný souhrnný vstup x může být taková spojitá funkce určena například výrazem

$$y = f(x) \quad (105)$$

konkrétně např. $y = a - b \cdot (x - c)^2$ (106)

Vrchol této paraboly $[c; a]$ má x-ovou souřadnici x a y-ovou souřadnici a .

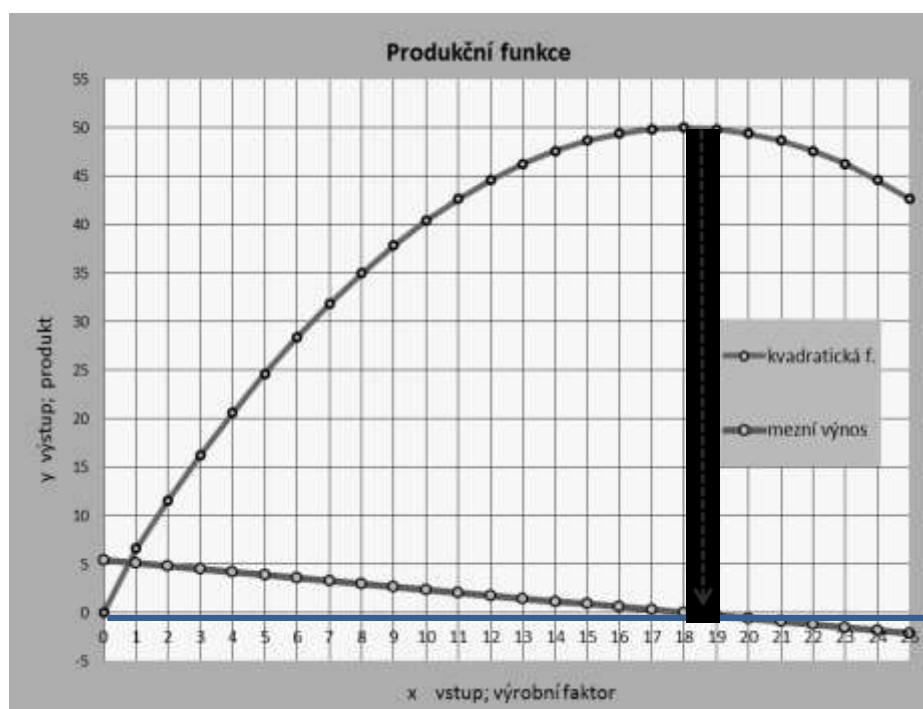
Parametr b vypovídá o špičatosti dané paraboly. Lze pomocí něj zajistit např. to, že daná parabola prochází počátkem apod.

Na ilustračním obrázku 32 je nakreslena tato konkrétní produkční funkce:

$$y = 50 - 0,15432 \cdot (x - 18)^2 \quad (107)$$

Parametry mají následující hodnoty: $a = 50$; $b = 0,15432$; $c = 18$. tato parabola prochází počátkem souřadnic a souřadnice jejího vrcholu jsou $[18; 50]$.

Obrázek 32: Obecné kvadratická produkční funkce



Zdroj: vlastní zobrazení

Tato produkční funkce zobrazuje skutečnost, že širší využití sledovaného jediného výrobního faktoru (dále jen VF) přináší sice další růst produktu, avšak tento růst je stále pomalejší tj. mezní výnos je klesající (zelená přímka). Tento pokles vede až k zastavení růstu produktu pro $x = c = 18$. Mezní výnos je v bodě maximální hodnoty produkční funkce nulový. Další navyšování faktoru x by vedlo již k poklesu⁶⁷ produktu.

⁶⁷ Pokud bude tímto výrobním faktorem při pěstování rostlin voda, představuje absolutní pokles produktu, kterou je úroda těchto rostlin, tak silná závlivka, která již rostlinám škodí, např. uhnívají.

V praxi je obvykle snadné takové situaci zabránit tím, že VF v takové míře již nepoužíváme (například je-li VF voda, omezíme zálivku). V našem případě klesá mezní produkt lineárně. Jeho průběh je dán derivací funkce (107), kterou označíme y' .

$$y' = 0,3 \cdot (18 - x) \quad (108)$$

Takovéto vyjádření produkční funkce je sice názorné a jednoduché, avšak v určitých případech neodpovídá realitě dostatečně. Výrobní faktory obvykle nelze navyšovat plynule a většinou je možno získat nějakou produkci až při využití určitého minimálního množství⁶⁸ daného VF. Na to abychom mohli tyto skutečnosti vzít v úvahu, musíme respektovat, že obvykle až určité minimální množství daného VF přináší nějakou produkci. Např. rostlina vyžaduje určitou minimální zálivku, aby se objevila alespoň nějaké úroda, hospodářská zvířata vyžadují alespoň minimální výživu, na výrobu automobilu je zapotřebí určité množství materiálu apod. Pokud budeme pěstovat více rostlin, budeme potřebovat násobné množství VF, který bude přibývat po určitých množstvích tzv. kvantech. Rovněž VF i produkt má vždy nějaké minimální kvantum. Například vody nemohu použít méně než jednu molekulu podobně jako půdy. Velmi malé je také minimální kvantum elektrické energie apod. Tato kvanta jsou v ekonomii většinou pod její praktickou rozlišovací úroveň. Pokud jsou tato minimální kvanta makroskopická a nedělitelná jako hospodářská zvířata, zaměstnanci nebo budovy měli bychom je respektovat.

Je to podobné jako v kvantové teorii, která se zabývá mikrofyzikálními procesy. V oblastech přírody, které jsou dostupné smyslovému vnímání, se jeví většina dějů spojitě, neboť se na nich podílí obrovský počet atomů a procesů v nich probíhajících. Mnohé procesy v jednotlivých atomech probíhají naproti tomu skokem. V atomu existuje jen určitý počet stabilních stavů elektronů při jejich pohybu kolem atomového jádra. Systémy, které jsou charakterizovány určitými diskrétními číselnými hodnotami (kvantová čísla), se nazývají **kvantované**. Kvantově mechanická povaha hmoty, která byla dlouho mimo pozornost našich vědců, probíhá až v mimořádně malých rozměrech. To souvisí s extrémně malou hodnotou tzv. Plankovy konstanty⁶⁹, která má tuto nepatrnou velikost $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js. Pouze v případě, že neuvažujeme se zrnitostí prostoru a času můžeme používat diferenciální rovnice a svět tak představuje **kontinuum** i v nejmenších myslitelných rozměrech.

Kvantová teorie je téměř v každém ohledu⁷⁰ protikladem Einsteinovy obecné teorie relativity, která naopak pokrývá velké rozměry a je spojena s hladkými a spojitými funkcemi časoprostoru⁷¹. V obou těchto teoriích se ale objevují potíže s bezrozměrnými (bodovými) objekty (singularitami)⁷². Tyto potíže se snaží překonat při spojení obecné teorie relativity a kvantové teorie tzv. **teorie strun**, která přinesla myšlenku, že nejde o bodové objekty, nýbrž o nepatrné vibrující uzavřené struny⁷³.

⁶⁸ Pokud neuvažujeme minimální množství VF, nabývají veličiny spojitých funkcí v oblasti počátku souřadnic těžko interpretovatelných hodnot jako je maximální efektivnost apod.

⁶⁹ (Bais, 2009) s. 72 a 73.

⁷⁰ (Seife, 2005), udává na s. 220: *Vesmír obecné teorie relativity je spojitý, nemá žádné hrany ani hroty. Kvantová mechanika na druhé straně popisuje vesmír jako roztrhaný a přetržitý.*

⁷¹ (Kaku, 1994), s. 111.

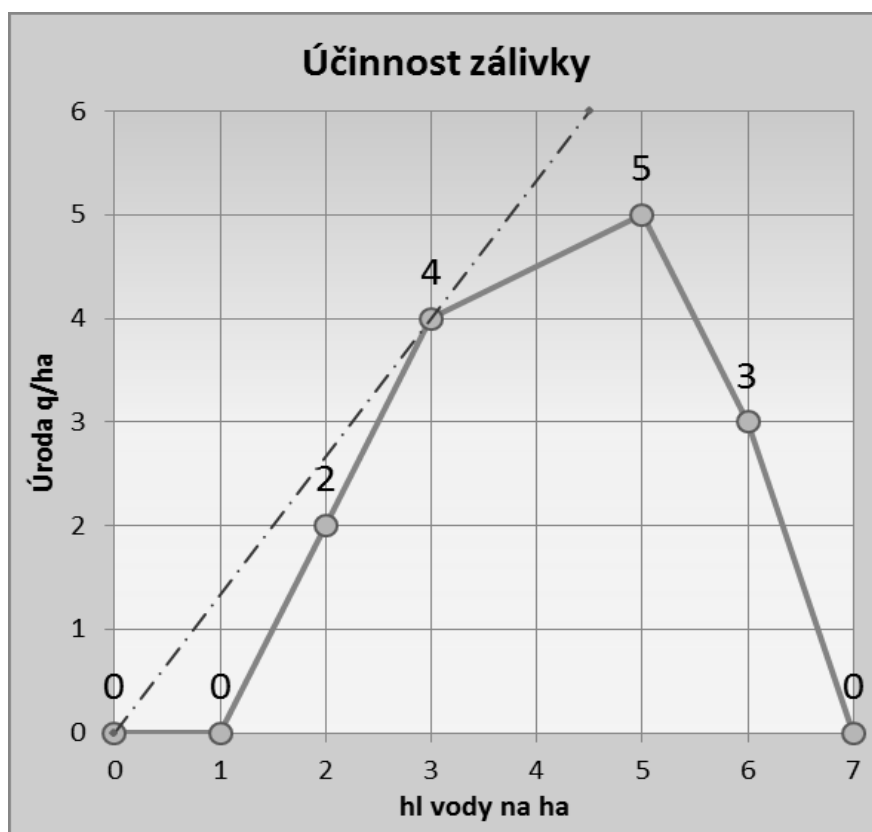
⁷² (Seife, 2005), s. 222 a 223.

⁷³ (Livio, 2009), s. 188 nebo (Seife, 2005), s. 224.

Ekonomické modely naráží na obdobné problémy jako fyzika. Jde o analogickou situaci jako ve fyzice, kde také dlouho trvalo, než se na malých rozměrech problém kvantování objevil. K tomu abychom mohli ilustrovat, jak se projevuje kvantování v ekonomii na příkladu produkční funkce je potřeba nejdříve nadefinovat co je to trajektorie dosažení cíle a co jsou to přípustná a optimální řešení. Současně tak nadefinujeme co to je suboptimální řešení. To vše je potřebné pro pochopení ilustrativního příkladu, kterým je již dříve představená *Farmářská úloha*. Ta totiž pracuje s produkční funkcí, na které je možno ukázat vliv kvantování.

V praxi i v teorii se často vyskytují situace, kdy k dosažení určitého cíle vede více cest, které představují tzv. **přípustná řešení**, zatímco ta nejlepší cesta, která může být jedna nebo je jich více se nazývají **optimální řešení**. Jestliže se přípustná řešení navzájem tiší, je na jisté, že jedno z nich bude optimální. To velmi záleží na kritériu optima. Někdy není optimální řešení žádné. Pokud by nebylo žádné přípustné řešení, nebude ani žádné optimální řešení a taková úloha prostě nemá řešení. Přípustná řešení, jež nejsou optimální, se též nazývají **suboptimální**. Jestliže má úloha optimální řešení, pak je každé její suboptimální řešení zatíženo nějakou **ztrátou**, a to bez ohledu na to, zda má úloha jediné optimální řešení nebo zda má optimálních řešení více.

Obrázek 33: Produkční funkce závlivky



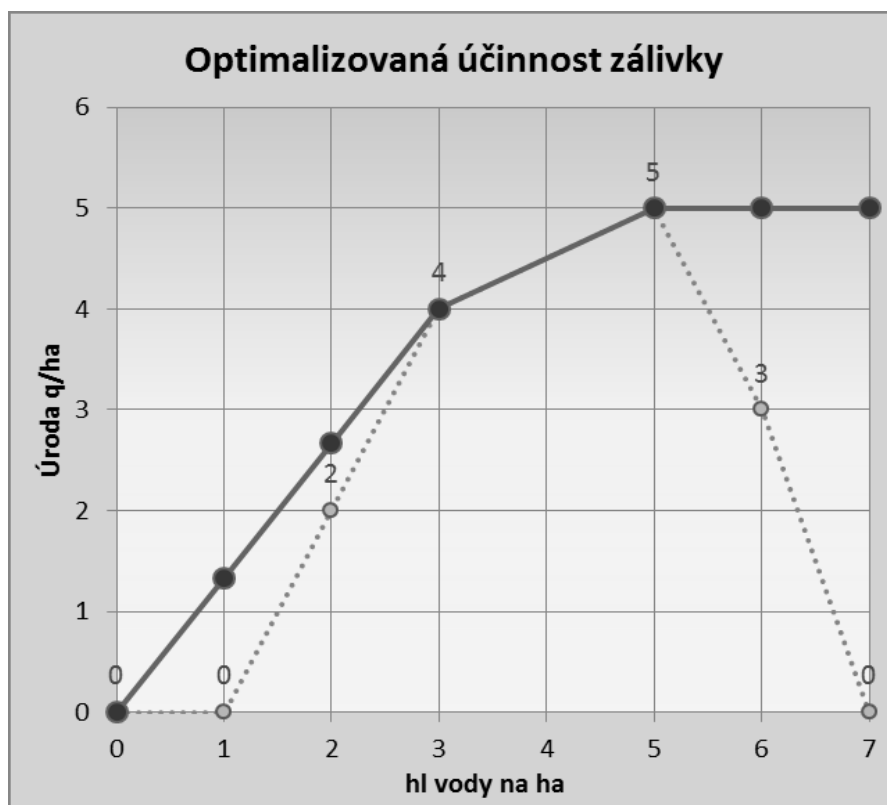
Zdroj: vlastní zobrazení

Příkladem optimalizační úlohy je alokace vody z omezeného zdroje, která byla zevrubně rozebrána již v kapitole 8, proto budou připomenuty jen základní myšlenky s tím, že budeme nejdříve zvažovat 3 farmáře, kteří mají k dispozici omezené množství vody pro zavlažování svých polí. Množství použité vody má pochopitelně vliv na

dosaženou úrodu. Předpokládáme, že četné další faktory jsou konstantní, tj. ceteris paribus. Pokud si uvedený vodní zdroj (např. studna), jehož celková kapacita odpovídá jejich úhrnné potřebě, rozdělí všichni 3 v určitém předem známém poměru (např. podle rozlohy pozemků), dosáhnou v daném období v souhrnu všichni 3 farmáři maximální úrodu. Pokud si vodu rozdělí (alokují) jinak, bude součet úrod menší než při optimální alokaci. Každá suboptimální alokace tak sníží součet sklizní všech tří farmářů i některých z nich. To ovšem nevylučuje, že při suboptimální alokaci vody bude mít jeden či dva farmáři úrodu vyšší, než při optimální alokaci vody. Ukázalo se, že různá suboptimální (přípustná) řešení alokace vody se od sebe navzájem liší a vyznačují se různými smyslupnými interpretacemi. Naším úkolem je nalézt matematický aparát pro vyjádření všech těchto suboptimálních řešení a tato analyzovat.

Výchozí informace pro optimalizaci jsou fakta o rostlinách, které budeme pěstovat. Pro zachycení vztahu mezi úrodou a potřebným množstvím vody na závlivku není vhodné používat běžnou produkční funkci, neboť je účelné aby tato funkce nebyla závislá na velikosti obhospodařovaných ploch. Příslušný výzkumný ústav proto vztáhne výsledky na jednotku ploch např. ha či m^2 . Vyjdeme z ilustrativního příkladu, v němž byly v obrázek 34 představující produkční funkci vyjadřující účinnost závlivky naměřeny např. následující hodnoty

Obrázek 34: Plně konkávní graf produkční funkce závlivky



Zdroj: vlastní zobrazení

Bod (1,0) představuje minimální závlivku. Bod (3,4) se vyznačuje nejlepším využitím jednotkového množství vody.

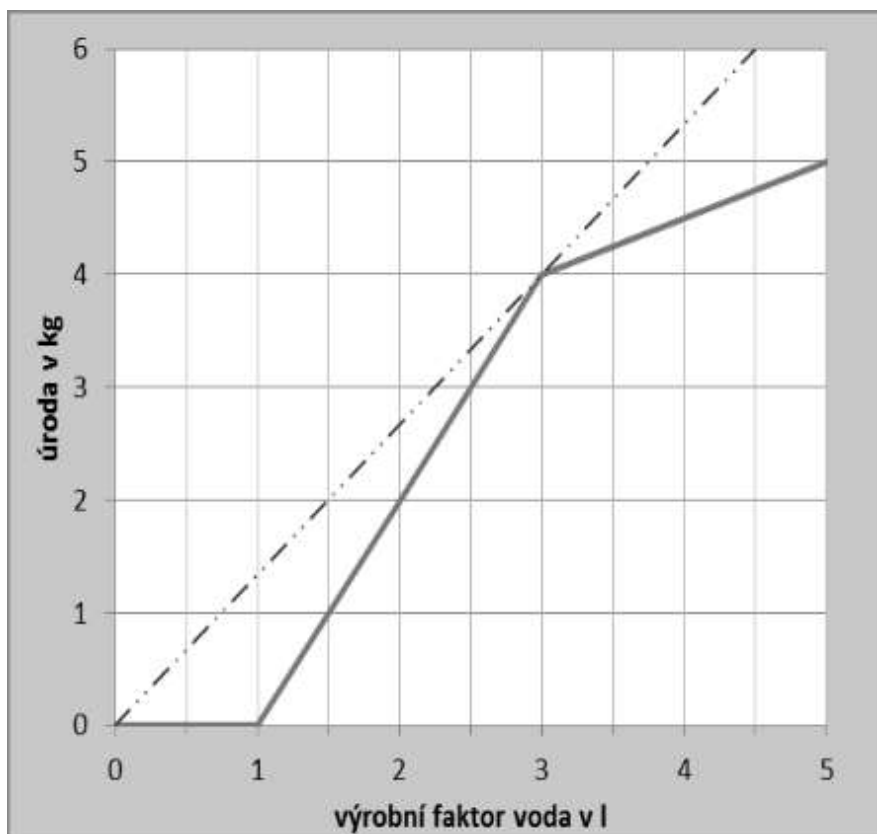
Účinnost zalévání je zde dána poměrem

$$u = \frac{y/G}{x/G} = \frac{4}{3} \quad (109)$$

kde u je účinnost závlivky; y je úroda v našem případě 24 q; x je množství použité vody 18 hl představuje výrobní faktor a G je rozloha zkušebních pozemků v našem případě např. 6 ha. V bodě (5,5) je sice největší úroda, zato účinnost závlivky klesla na 1 ($x = 30$ hl; $y = 30$ q). V následujících bodech již dochází při nadbytečné závlivce, k poklesu úrody na 1 q.

Hospodář optimalizující svou úrodu se snadno vyvaruje klesající úrody tím, že i při dostatku vody nepoužije na ha více vody než 5 hl/q. Pokud má méně vody a nemůže na ha použít 5 hl, při kterých má úrodu největší, bude se při menší a přitom rovnoměrné závlivce úměrně snižovat výnos z ha až při 3 hl/ha klesne úroda na 4 q/ha. V tomto bodě je každý hl vody nejlépe využit, protože dává maximální účinnost 4/3 q/hl. Při rovnoměrné závlivce všech polností bude lineárně klesat i úroda až do minimální závlivky, při které je úroda nulová.

Obrázek 35: Produkční funkce závlivky pro jednu rostlinu



Zdroj: vlastní zobrazení

Avšak pokud v oblasti bodů (0,0) až (3,4) použijeme nerovnoměrnou závlivku tak, že zalijeme maximum rostlin tak jako v bodě (3,4) dosáhneme v této oblasti trvale účinnost 4/3 tj. budeme se pohybovat po spojnici bodů (0,0) a (3,4). Například v bodě

(0,1) nám při rovnoměrné záливce více rostlin, již vychází na jednu rostlinu méně než 1 hl/ha. Celkově je vody dostatek na efektivní zalití, alespoň některých rostlin. Pokud takto získanou úrodu přepočítáme na 1 ha, zjistíme, že na ha získáme úrodu 1,333, což odpovídá účinnosti záливky 4/3. Touto optimalizací se nám promění obrázek 33 na obrázek 34, který je již plně konkávní.

Tabulka 12: Propočty produkční funkce záливky pro jednu až 10 rostlin

| rostlin | vody | 3 | | 4 | 2 | |
|---------|------|--------|-----|-------|-------|-------|
| | 1 | l/ros | ros | úrod1 | úrod2 | úroda |
| | 0 | | | | | 0 |
| 1 | 1 | 0,3333 | 0 | 0 | 0,0 | 0,0 |
| 1 | 2 | 0,6667 | 0 | 0 | 2,0 | 2,0 |
| 1 | 3 | 1 | 1 | 4 | | 4,0 |
| 1 | 4 | 1,3333 | 0 | 0 | 4,5 | 4,5 |
| 1 | 5 | 1,6667 | 0 | 0 | 5,0 | 5,0 |
| 2 | 6 | 2 | 2 | 8 | 0,0 | 8,0 |
| 2 | 7 | 2,3333 | 1 | 4 | 4,5 | 8,5 |
| 2 | 8 | 2,6667 | 1 | 4 | 5,0 | 9,0 |
| 3 | 9 | 3 | 3 | 12 | 0,0 | 12,0 |
| 3 | 10 | 3,3333 | 2 | 8 | 4,5 | 12,5 |
| 3 | 11 | 3,6667 | 2 | 8 | 5,0 | 13,0 |
| 4 | 12 | 4 | 4 | 16 | | 16,0 |
| 4 | 13 | 4,3333 | 3 | 12 | 4,5 | 16,5 |
| 4 | 14 | 4,6667 | 3 | 12 | 5,0 | 17,0 |
| 5 | 15 | 5 | 5 | 20 | | 20,0 |
| 5 | 16 | 5,3333 | 4 | 16 | 4,5 | 20,5 |
| 5 | 17 | 5,6667 | 4 | 16 | 5,0 | 21,0 |
| 6 | 18 | 6 | 6 | 24 | | 24,0 |
| 6 | 19 | 6,3333 | 5 | 20 | 4,5 | 24,5 |
| 6 | 20 | 6,6667 | 5 | 20 | 5,0 | 25,0 |
| 7 | 21 | 7 | 7 | 28 | | 28,0 |
| 7 | 22 | 7,3333 | 6 | 24 | 4,5 | 28,5 |
| 7 | 23 | 7,6667 | 6 | 24 | 5,0 | 29,0 |
| 8 | 24 | 8 | 8 | 32 | | 32,0 |
| 8 | 25 | 8,3333 | 7 | 28 | 4,5 | 32,5 |
| 8 | 26 | 8,6667 | 7 | 28 | 5,0 | 33,0 |
| 9 | 27 | 9 | 9 | 36 | | 36,0 |
| 9 | 28 | 9,3333 | 8 | 32 | 4,5 | 36,5 |
| 9 | 29 | 9,6667 | 8 | 32 | 5,0 | 37,0 |
| 10 | 30 | 10 | 10 | 40 | | 40,0 |
| 10 | 31 | 10,333 | 9 | 36 | 4,5 | 40,5 |
| 10 | 32 | 10,667 | 9 | 36 | 5,0 | 41,0 |

Zdroj: vlastní propočty

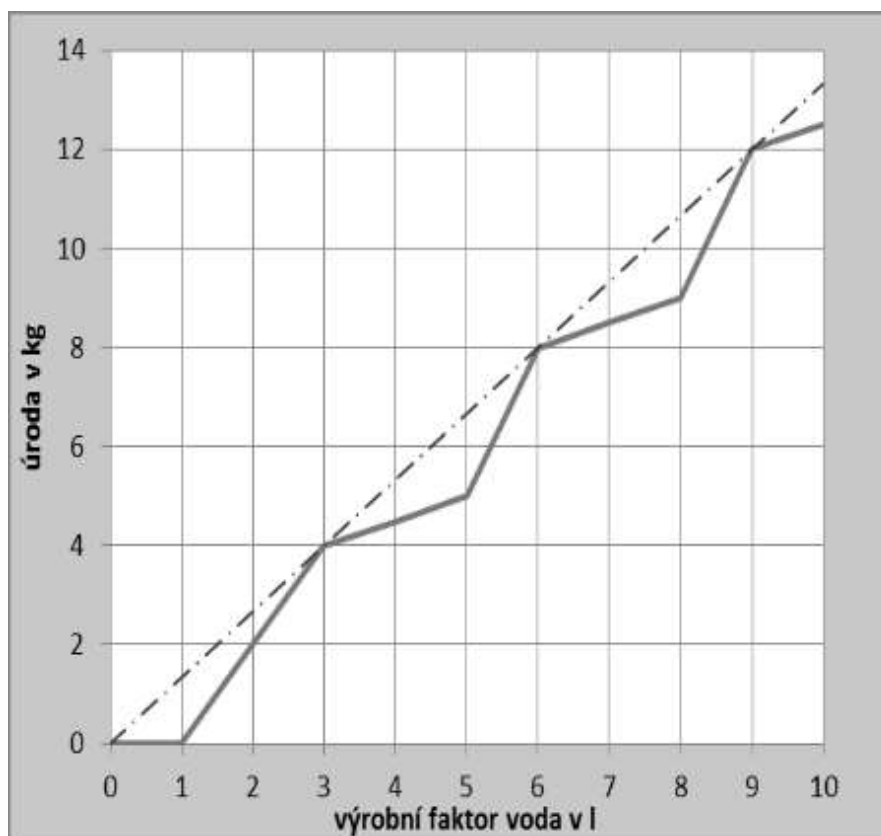
Rovněž tento graf představuje určité zjednodušení neboť červená úsečka procházející počátkem souřadnic tj. bodem (0,0) by znamenala, že úroda se objevuje již při sebemenší záливce a to není pravda. Reálná je produkční funkce a její odpovídající obrázek, která generuje úrodu až pro tzv. minimální množství vody, tj. např. tečkovaná lomená čára.

Uvedené nereálnosti lze odstranit, pokud bude obrázek 32 vztažen (např. příslušným výzkumným ústavem) pouze na jednu rostlinu. Spotřebovanou vodu pak budeme měřit např. v l za vegetační období a úrodu např. v kg (řekněme, že jde o melouny).

Následující obrázky 36 až 40 ukazují, jak vypadá graf funkce účinnosti, který je současně produkční funkcí pro 5; 10; 35; 100 a 1000 l což odpovídá 1; 3; 11; 33 či 333 rostlinám. Tyto grafy respektují minimální kvantum pěstování plodin, kterým je jedna rostlina. Každá rostlina potřebuje k svému vývoji nějakou minimální rozlohu půdy a minimální množství dalších faktorů.

Grafy ilustrují tu skutečnost, že jakmile máme k dispozici více jak 5 l vody, můžeme využít další rostlinu, takže při 6 l jsme opět v situaci s maximální účinností $4/3$. Při dispozičních 8 l vody můžeme zapojit i třetí rostlinu. To můžeme učinit vždy, když máme k dispozici další 3 litry vody. Výsledkem je lomená čára, která vždy respektuje minimální závlivku pro jednu rostlinu. Při rostoucím počtu rostlin odpovídajících rostoucímu množství vody je vlnitý charakter spojitě avšak lomené křivky již málo patrný. Pro velký počet rostlin pak můžeme tuto funkci aproximovat přímkou procházející počátkem. Všechny body pak budou mít stejnou účinnost, v našem případě $4/3$.

Obrázek 36: Produkční funkce závlivky pro tři rostliny



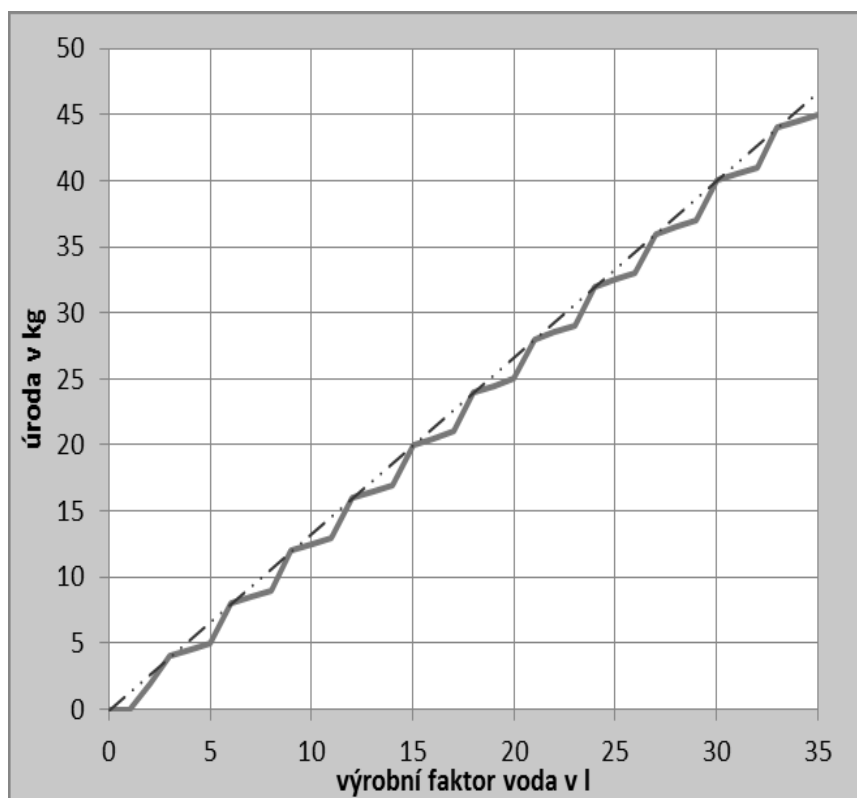
Zdroj: vlastní zobrazení

Podrobné propočty produkčních funkcí pro 1 až 10 rostlin ukazuje tabulka 12. V prvním sloupci je uveden počet rostlin. Ve druhém sloupci je plynule rostoucí množství vody v závlivce od 1 do 32 l. V dalších sloupcích jsou pomocné dílčí výpočty. Např. ve sloupci „úrod1“ je výnos z rostlin při nejvyšší efektivnosti a ve sloupci „úrod2“ je výnos z rostlin

při nižší či vyšší záливce než při nejvyšší efektivnosti. V posledním sloupci je celková úroda, tj. součet ve sloupci „úrod1“ a „úrod2“. Kvantovanou produkční funkci tvoří sloupec 2 (vstupem je množství vody v l) a poslední sloupec 7 (úroda v kg).

Obrázek 36 je produkční funkcí pro záливku od 0 do 10 l, což si vyžaduje použití 3 rostlin. Názorně je zde vidět, jak se skládají do schodovitého grafu tři produkční funkce pro jednu rostlinu s tím, že produkce trvale roste. Je zde rovněž čerchovaně zobrazena přímka, na které leží body maximální efektivnosti (úroda kg/záливka l), tj. nejlepšího využití záливky. Tato efektivnost je shodná pro všechny boby s optimální efektivnosti po libovolný počet použitých rostlin.

Obrázek 37: Produkční funkce záливky pro jedenáct rostlin

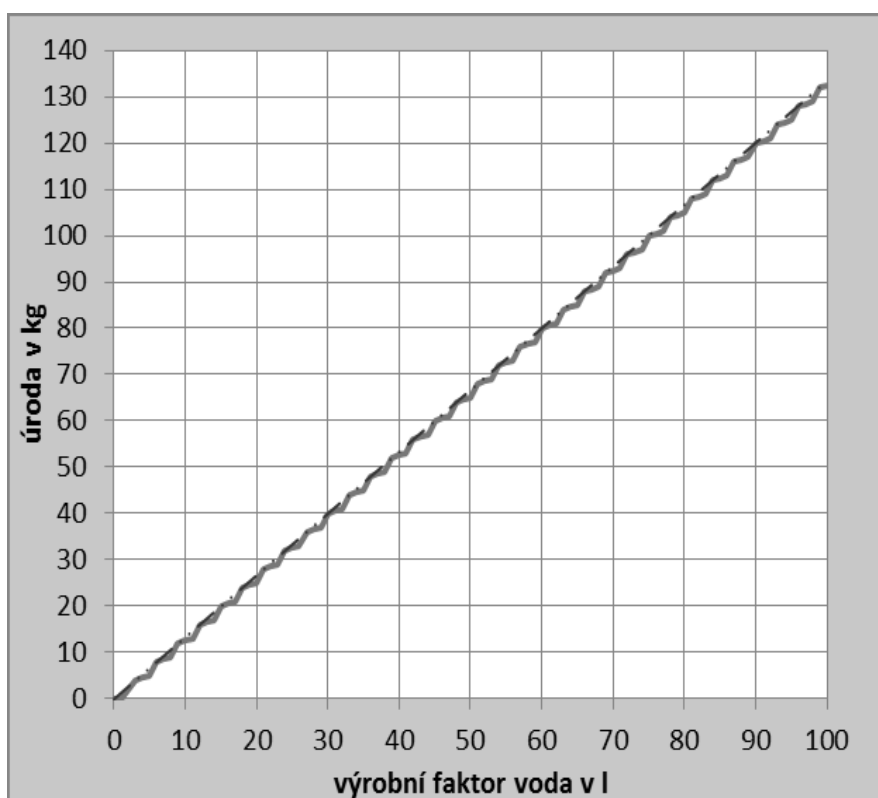


Zdroj: vlastní zobrazení

Obrázky 37 a 38 jsou analogické k obrázku 36 s tím, že je zde větší rozsah použité záливky do 35 l, kde je použito 11 rostlin (obrázek 37) a do 100 l, kde je použito 33 rostlin (obrázek 38). Smyslem těchto grafů ukázat je jak se tato lomená křivka produkční funkce postupně opticky vyhlazuje. Současně je nezbytné uvědomit si, že je to sice monotónně rostoucí spojitá funkce, avšak složená z velkého počtu úseček, takže k takové křivce nelze sestrojit tečnu, nebo spočítat její derivaci.

Tabulka 13 ilustruje nejen počet rostlin, množství záливky (v l) a úrodu (kg) pro 100 l nýbrž i pro 1000 l dále pro záливky rostoucí v každém řádku desetinasobně až do 1 ml. l.

Obrázek 38: Produkční funkce zálivky pro 33 rostlin



Zdroj: vlastní zobrazení

Tabulka 13: Produkční funkce pro rychle rostoucí počet rostlin

| rostlin | vody (l) | úroda (kg) |
|-----------|------------|--------------|
| 33 | 100 | 132,5 |
| 333 | 1000 | 1332,5 |
| 3333 | 10000 | 13332,5 |
| 33333 | 100000 | 133332,5 |
| 333333 | 1000000 | 1333332,5 |
| 3333333 | 10000000 | 13333332,5 |
| 33333333 | 100000000 | 133333332,5 |
| 333333333 | 1000000000 | 1333333332,5 |

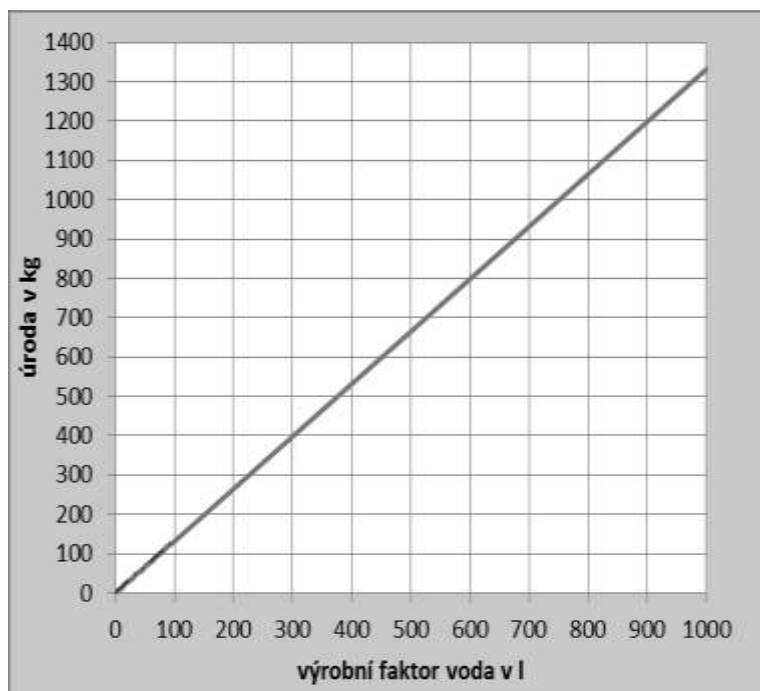
Zdroj: vlastní zobrazení

Obrázek 39 znázorňuje produkční funkci pro 333 rostlin s rozsahem zálivky do 1000 l. Podle očekávání již je to opticky přímka.

Pokud budeme potřebné nakreslit produkční funkci pro určitý počet rostlin daný například určitým omezením využívané rozlohy pozemků, můžeme si takový bod vyznačit na jednom z uvedených grafů s vhodným měřítkem. Na obrázek 40 (analogie s obrázek 38) je taková funkce nakreslená pro 10 a 20 rostlin. Pokud byla dále zvyšována zálivka, poroste produkce až do bodu (50,50), tj. při 50 l zálivky obdržíme 50 kg úrody. Dále se již produkce s větším množstvím zvyšovat nebude, neboť by již klesala účinnost. Tyto body maximální úrody pro určité počty rostlin leží na čerchované přímce rovněž zakreslené na obrázek 40. Tato produkční funkce se již podle očekávání

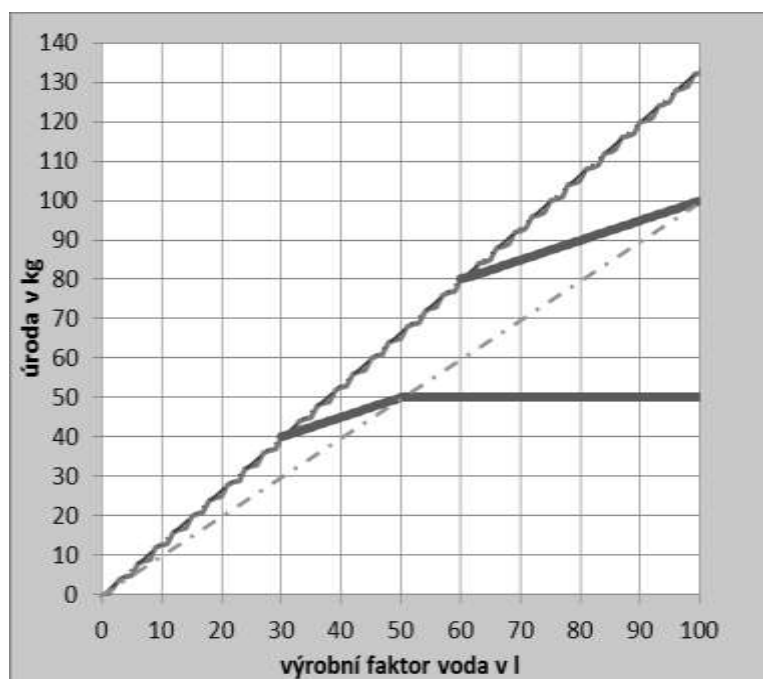
podobá produkční funkci na obrázek 33 s tím rozdílem, že v obrázek 40 jde ve skutečnosti o lomenou čáru, která respektuje minimální závlivku jedné rostliny.

Obrázek 39: Produkční funkce závlivky pro 333 rostlin



Zdroj: vlastní zobrazení

Obrázek 40: Produkční funkce pro určitý počet rostlin (rozlohu polí)

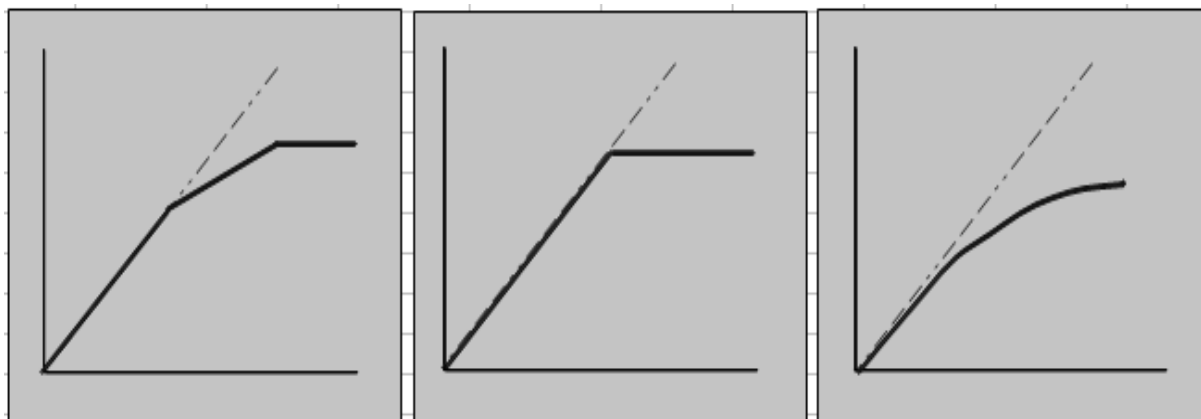


Zdroj: vlastní zobrazení

Konkávni pod proporcionalní produkční funkce s klesajícím mezním výnosem z obrázku 35 nebo 40 mohou mít různé konkrétní tvary, tak jak jsou zakresleny na grafu 41. Kvantová produkční funkce byla demonstrována ne dvakrát zalomené

produkční funkci, která demonstuje všechny typické body a je zobrazena na grafu 41a. Produkční funkce může být zalomená jen jednou, tak jak je to znázorněno na grafu 41b. Tento graf odpovídá např. extenzivnímu vývoji s určitým omezením např. rozlohou pozemků, množstvím surovin, práce apod. V obrázcích 41a a 41b dochází ke skokovému poklesu mezního produktu. Obrázek 41c je zobecněná produkční funkce 41a, u které dochází k plynulému (spojitému) poklesu mezní produkce, tj. zmenšování přírůstků produkce při jednotkovém přírůstku závlivky. Pokud je produkční funkce křivka 2. stupně, např. parabola, tak pokles mezního produktu je lineární.

Obrázek 41a, b, c: Základní tvary produkční funkce s jedním faktorem



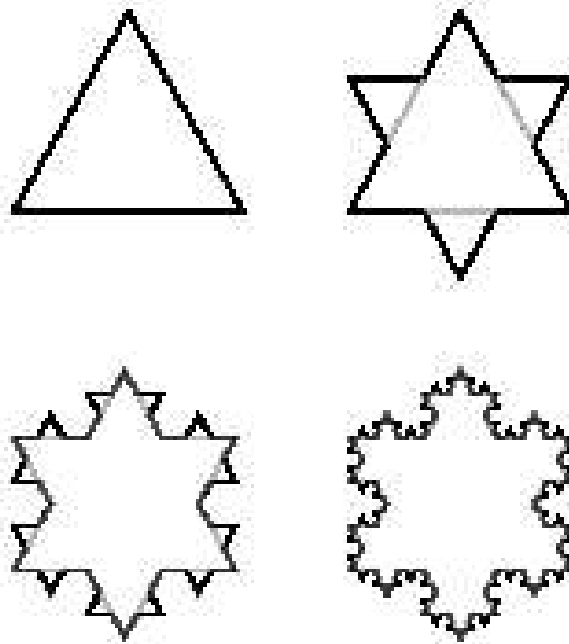
Zdroj: vlastní zobrazení

Fraktální povaha

Lomené křivky na obrázcích 35 až 40 respektují jednotlivé rostliny, avšak na ty se díváme prozatím jako na homogenní objekty. Je však velmi pravděpodobné, že závlivka se týká především kořenového systému nebo listů, a tak by mohla vést k podobnému zvlnění produkčních křivek avšak o jednu hierarchickou strukturu níž. K tomu je potřeba odpovídající analogický graf k obrázku 32. To se bude opakovat i na další nižší úrovni např. v rámci buněčné struktury rostliny. Pokud zde nalezneme obdobné procesy vyznačující se kvanty na hlubší úrovni živé případně neživé hmoty, které si budou podobné, máme zde základ pro odhalení a konkretizaci její **fraktální povahy**.

Kochova křivka (obrázek 42) je jedna z prvních popsaných fraktálních matematických křivek. Znamější je jako součást Kochovy vločky. Křivka je pojmenována po švédském matematikovi Helge von Kochovi, který ji popsal ve své práci *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire* z roku 1904.

Obrázek 42: Kochova křivka - fraktál

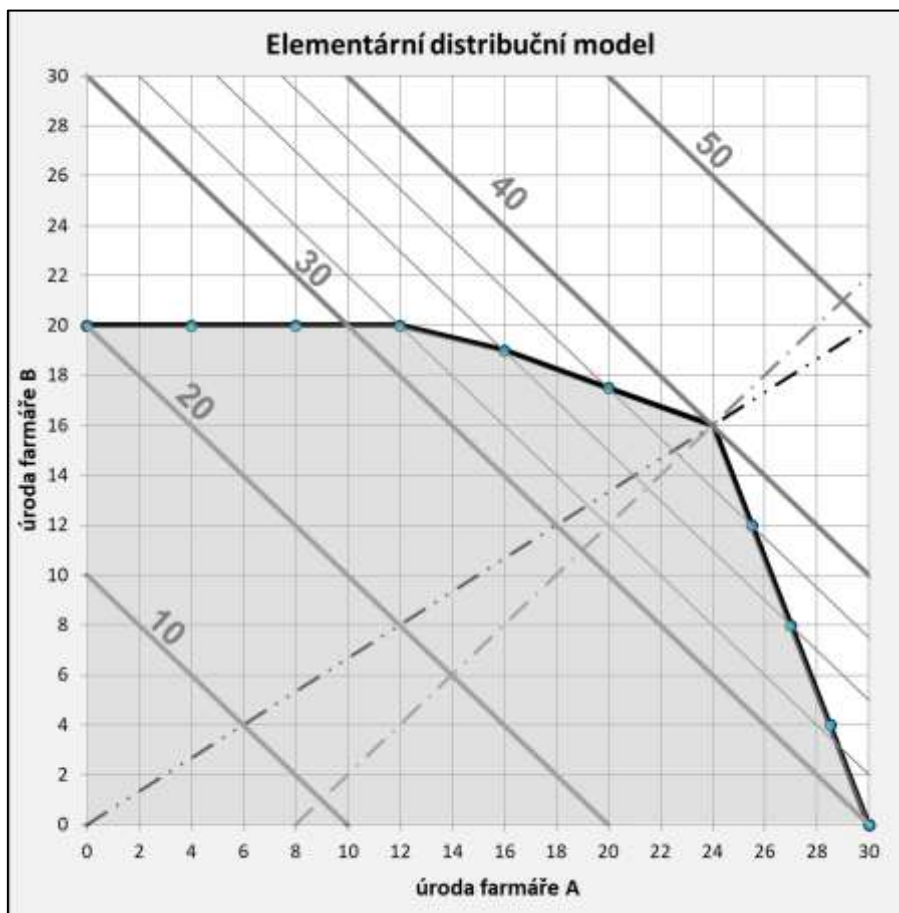


Zdroj: (Livio, 2006, s. 195)

12 Elementární distribuční model EDM

Až doposud byla v této monografii věnována pozornost produkční funkci jednoho aktéra, tj. firmě, producentovi, národní ekonomice, hráči apod. Prognostická kapitola 4 sice využívala prolongace časových produkčních funkcí pro různé národní ekonomiky, avšak nezabývala se otázkou omezených společných zdrojů. S problémem rozdělení omezeného množství vody se zabývala pouze kapitola 8, na kterou nyní budeme navazovat. Tato 12 kapitola se bude věnovat úlohám se dvěma nebo třemi aktéry, kteří mají většinou omezené společné vstupy (zdroje, výrobní faktory, výrobní prostředky, pozemky, vodu apod.) O tyto zdroje se budou dělit, přičemž díky znalosti použitých produkčních funkcí, tak získají větší či menší individuální a společný výstup, produkt. Řešení bude závislé na tom, zda je vstupů (zdrojů) nedostatek či přebytek. Jednou z úloh bude zjistit, zda nějak souvisí s maximalizací výstupů volba vhodného např. významného bodu na produkční funkci. Pod volbou bodu na produkční funkci, nebo obecněji výběrem produkční funkce se rozumí volba vhodné technologie, či způsobu sdružování vstupů za účelem produkce výstupů systému.

Obrázek 43: Elementární distribuční model (EDM)



Zdroj: vlastní zobrazení

Vzhledem k tomu, že v obecné rovině je problematika EDM pro mnohé nestravitelná, bude i nadále využívána dobře interpretovatelná a srozumitelná farmářská úloha. V mikroekonomii je analogií EDM tzv. hranice produkčních možností.

V případě, že uvažujeme dva producenty (farmáře), kteří pěstují stejnou plodinu, avšak na různě velkých pozemcích, platí pro oba stejná produkční funkce. Ta může být téměř stejná či velmi podobná i u různých plodin. Velmi tady záleží na přesnosti či prokreslenosti dané produkční funkce. Pokud zachycuje jen několik charakteristických bodů, snáze se najde podobná produkční funkce i pro jinou plodinu. Jediná produkční funkce tak umožňuje spočítat produkt jednoho i druhého producenta (farmáře). Pokud tyto produkty (úrody) vyneseme na souřadné osy, lze zakreslit prostor přípustných řešení a současně sledovat celkový produkt (úrodu), tj. součet obou produktů (úrod). Konstrukci prostoru přípustných řešení samo sebou nebrání, pokud mají oba producenti různé produkční funkce.

Součty obou produktů (úrod) se nachází na úsečkách se sklonem 45° spojujících stejné hodnoty na osách x a y . Zjednodušení v podobě stejných plodin ovšem není nutné. Pokud farmáři pěstují různé plodiny je nutno brát v úvahu, že potřeba vody na závlivku může být odlišná. To bude mít vliv např. na stanovení optimální závlivky.

Obrázek 43 ukazuje takový prostor přípustných řešení pro produkční funkci na obrázku 23 a rozsah pozemků jednoho farmáře 6 h a druhého 4 h. viz také farmářská úloha v kapitole 8. Údaje zobrazené na tomto grafu jsou uvedeny také v tabulce 14. V celé množině přípustných řešení (šedá plocha na obrázku 43) je jen jediný bod s nejvyšší celkovou úrodou 40 q.

Tabulka 14: Propočty EDM na obrázku 43

| | úrody | | |
|-------|-------------|-------------|-----------|
| hl/ha | A | B | celkem |
| 7,5 | 0 | 20 | 20 |
| 6,8 | 4 | 20 | 24 |
| 6 | 8 | 20 | 28 |
| 5,3 | 12 | 20 | 32 |
| 4,5 | 16 | 19 | 35 |
| 3,8 | 20 | 17,5 | 37,5 |
| 3 | 24 | 16 | 40 |
| 2,3 | 25,5 | 12 | 37,5 |
| 1,5 | 27 | 8 | 35 |
| 0,8 | 28,5 | 4 | 32,5 |
| 0 | 30 | 0 | 30 |

Zdroj: vlastní propočty

Rozděluje se optimální množství vody 30 hl. Při tomto množství závlivky a produkce se již kvantový efekt neprojevuje. Při menším počtu rostlin by se hranice EDM jevila jako vícekrát lomená křivka. EDM je vždy konkávní dvou, tří či vícerozměrné těleso. Jeho

ohraničení vždy tvoří navazující lomené úsečky nebo hladké konkávní křivky. V případě minimálních produktů (úrod, výher apod.) jsou součástí ohrazení souřadné osy, roviny či nadroviny.

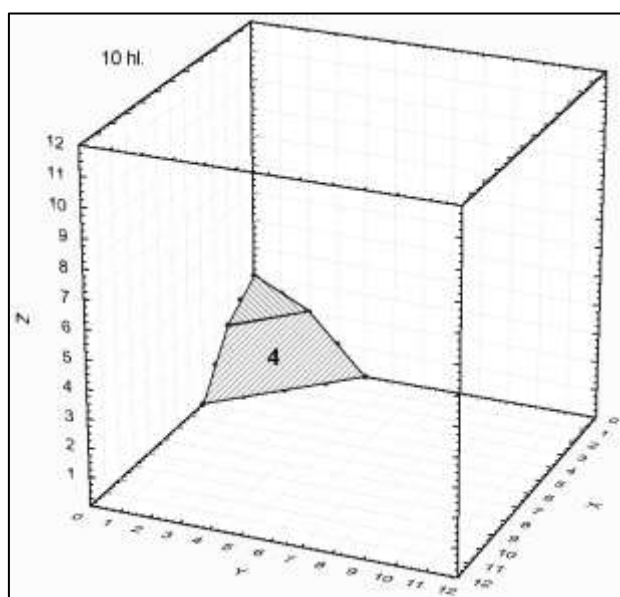
V dalším textu budou představeny různé druhy EDM pro dva a tři aktéry (farmáře, hráče apod.) odpovídající lomené produkční funkci i hladkým, tj. spojitým produkčním funkcím kvadratickým i polynomickým vyšších řádů. Konkrétní EDM je nástroj pro výpočet a zobrazení důsledků určitého rozdělení nějakého výrobního faktoru či agregovaného výrobního faktoru jako je např. SIF souhrnný input faktor.

Na EDM se dají řešit nejrůznější optimalizační úlohy. Nejčastější je úloha, vyhledání budu nejvyššího souhrnného produktu (úrody, výhry). Takových optimálních bodů může být více, záleží na specifikaci výchozích podmínek. Ukázkami takových bodů pro 3 aktéry bude věnován závěr subkapitoly 12.2.

12.1 EDM lomené produkční funkce pro 3 aktéry

Uvedené poznatky a způsoby vyjadřování produkční funkce respektující jednu rostlinu jako základní kvantum můžeme použít při řešení úlohy optimální alokace vody ve farmářské úloze se třemi farmáři. Prostor přípustných řešení by už nebyla část plochy, nýbrž část prostoru. Následující zobrazení vychází z toho, že jednotlivý farmáři mají k dispozici různě velké pozemky např. 6 ha, 4 ha a 2 ha. Mají opět společný omezený zdroj vody, zobrazení EDM (nebo také hranice produkčních možností) bude provedeno pro dispozičních 10; 20; 30; 40 a 60 hl. Optimální zásoba vody je 30 hl., při které je možno dosáhnout největší celkové úrody 12 q.

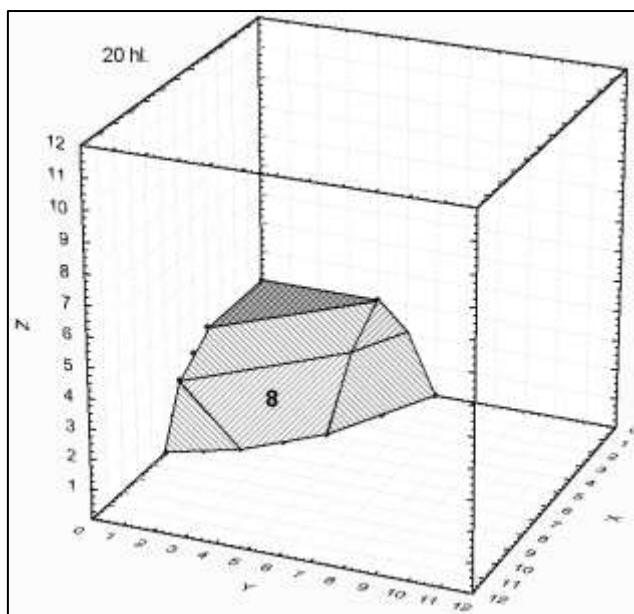
Obrázek 44: Prostor přípustných řešení pro zásobu vody 10 hl.



Zdroj: vlastní zobrazení

Celková úroda představovaná součtem úrod všech tří farmářů je dána rovnostrannými trojúhelníky, jejichž vrcholy leží na souřadných osách a mají stejné vzdálenosti od počátku souřadnic. Tato trojúhelníky představují izokvanty stálých souhrnných úrod. Optimalizace znamená nalezení nejvyšší izokvanty, která se ještě dotýká EDM.

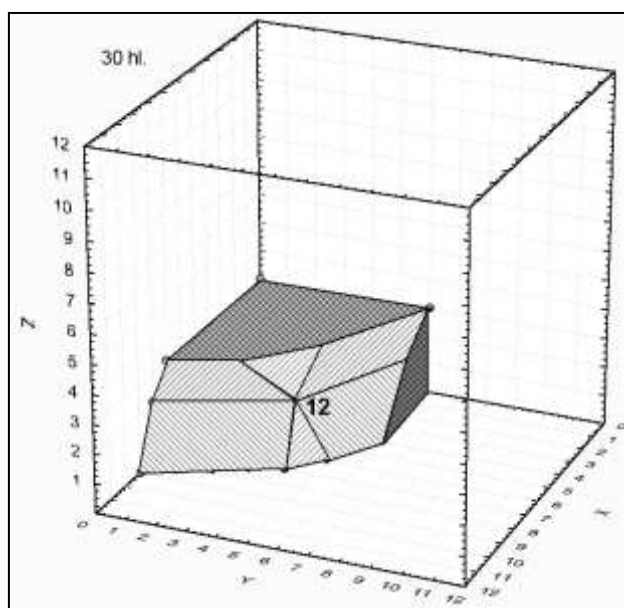
Obrázek 45: Prostor přípustných řešení pro zásobu vody 20 hl.



Zdroj: vlastní zobrazení

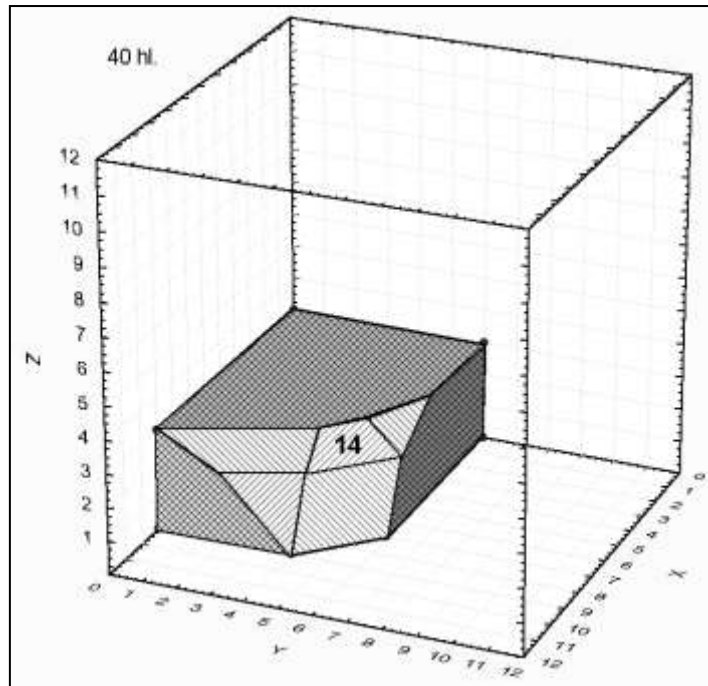
Opět bude platit, že při optimálním množství vody lze dosáhnout optimální úrody jen v jednom bodě EDM, a to při rozdělení vody v poměru rozloh pozemků. Tato situace je znázorněna na obrázek 46. Optimální celková úroda je 12 q.

Obrázek 46: Prostor přípustných řešení pro optimální zásobu vody 30 hl.



Zdroj: vlastní zobrazení

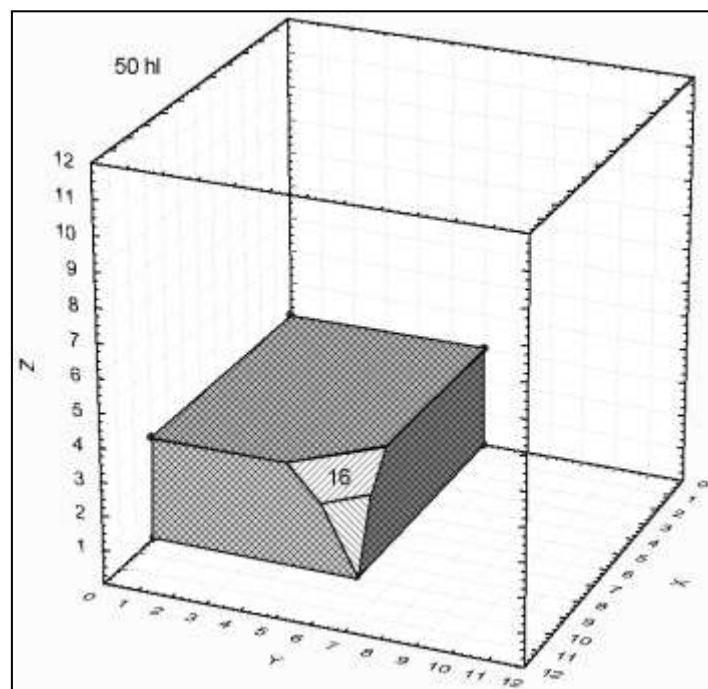
Obrázek 47: Prostor přípustných řešení pro zásobu vody 40 hl.



Zdroj: vlastní zobrazení

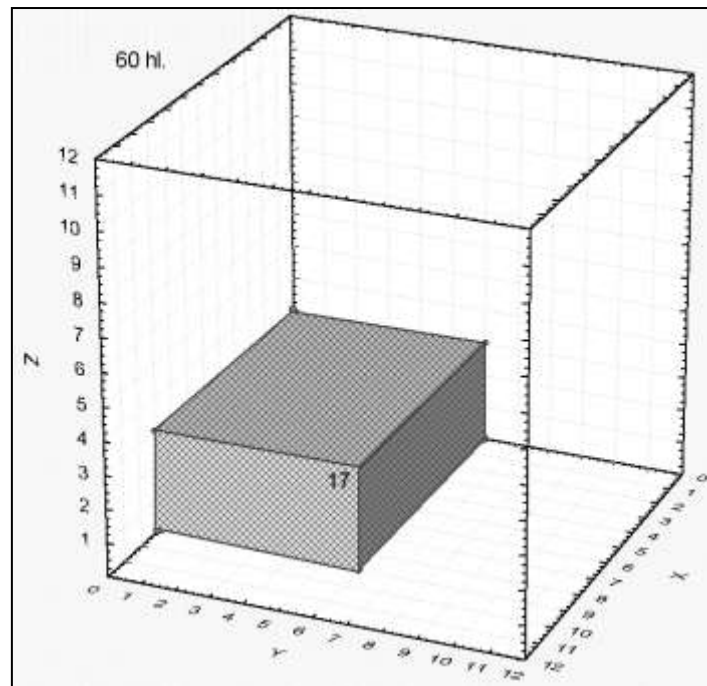
Obrázek 44 představuje řešení s nedostatkem vody, které je pouze 10 hl. Optimální izokvanta se dotýká celé plochy a má hodnotu 4 q. Obrázek 45 představuje řešení s nedostatkem vody, které je 20 hl. Optimální izokvanta se dotýká celé plochy a má hodnotu 8 q.

Obrázek 48: Prostor přípustných řešení pro zásobu vody 50 hl.



Zdroj: vlastní zobrazení

Obrázek 49: Prostor přípustných řešení pro zásobu vody 50 hl.



Zdroj: vlastní zobrazení

Obrázek 47 představuje řešení s přebytkem vody, které je 40 hl. Optimální izokvanta se dotýká celé plochy a má hodnotu 14 q. Obrázek 48 představuje řešení s přebytkem vody, které je 50 hl. Optimální izokvanta se dotýká celé plochy a má hodnotu 16 q

Poslední obrázek 49 představuje řešení s přebytkem vody, které je 50 hl. a více. Optimální izokvanta se dotýká opět jediného bodu a má hodnotu 17 q tj. maximální možná úroda, která ovšem plýtvá vodou (výrobním faktorem), neboť maximální úroda na jeden hl zálivky je v bodě maximální efektivity, tj. situace na obrázek 46.

12.2 Elementární distribuční model podle metrik

Elementární distribuční model představuje dvou, tří či vícerozměrný prostor, v rámci kterého se nacházejí všechna přípustná řešení, z nichž se potom obvykle hledá podle nějakého kritéria optimální řešení, nebo jen ta řešení, která mají určitou vlastnost. Tato subkapitola je věnována odvození prostoru přípustných řešení soustavou nerovností, podobně jako např. v lineárním programování.

Bude použita opět interpretace v rámci farmářské úlohy se třemi farmáři.

$$x + y + z = S - \eta \cdot R[(x - x_m); (y - y_m); (z - z_m)] \quad (210)$$

x je úroda farmáře **A**; y je úroda farmáře **B**; z je úroda farmáře **C**

x_m maximální úroda farmáře **A**; y_m farmáře **B**; z_m farmáře **C**

$S = x_m + y_m + z_m$ součet maximálních úrod funkce vzdálenosti od bodu maxima součtu η je koeficient vlivu redistribuce (účinnosti), který nabývá hodno $0 \leq \eta \leq 1$ (100 %), 0 k distribučním ztrátám nedochází, naopak 1 představuje maximální ztrátu.

$R[\]$ je funkce vzdálenosti od bodu maxima součtu.

Metriky, tj. vzdálenosti 2 bodů lze měřit např.

- euklejdovsky $\sqrt{[(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2]}$
- manhattansky $|x - x_m| + |y - y_m| + |z - z_m|$
- čebyševovsky $\max.[(x - x_m); (y - y_m); (z - z_m)]$

pokud je bod maximálních úrod $[x_m; y_m; z_m]$ konkrétně $[6;4;2]$

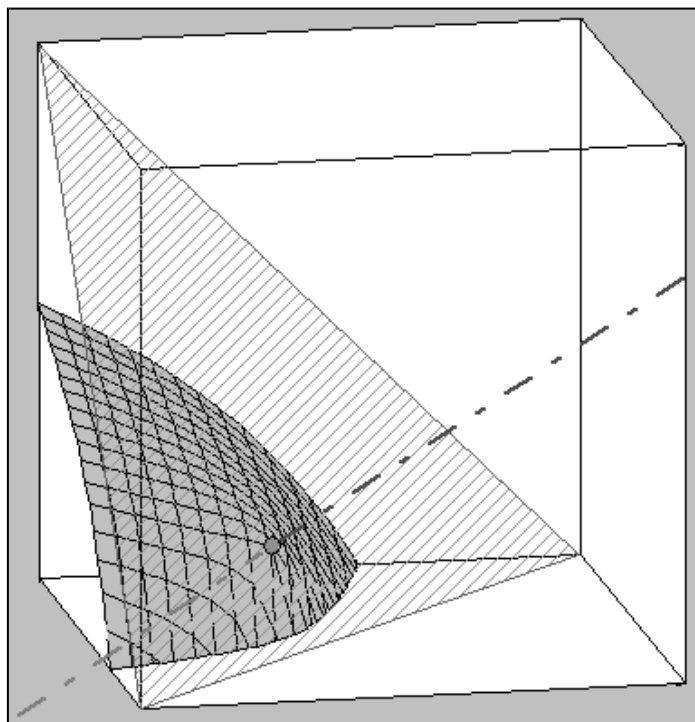
pak lze soustavu nerovností konkretizovat.

$$x + y + z = 12 - \eta \cdot R[(x-6);(y-4);(z-2)] \quad (211)$$

pro $x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$

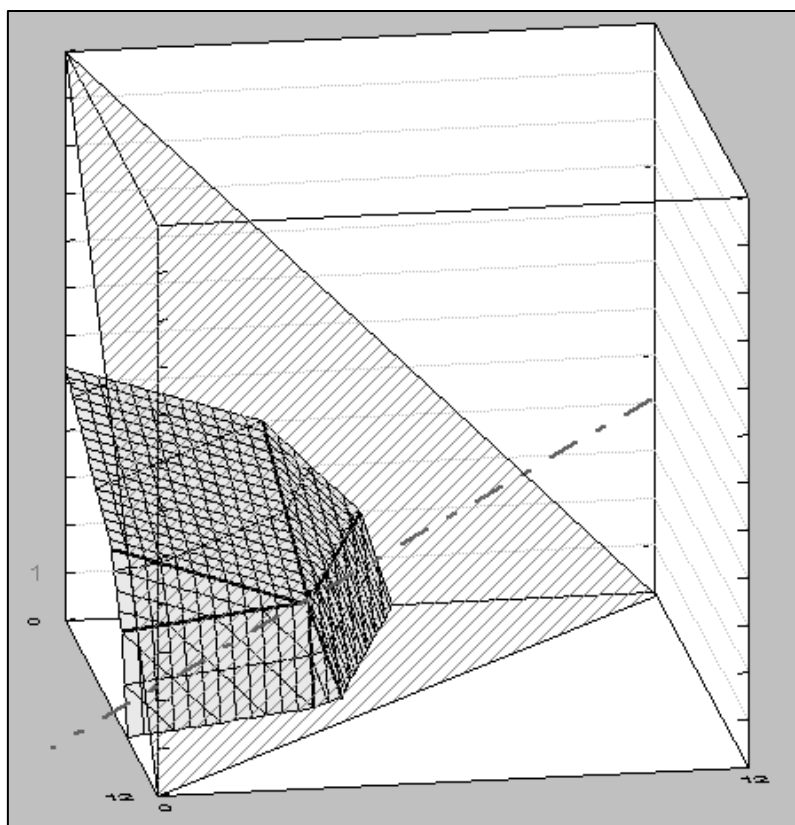
Obrázek 50 představuje elementární distribuční model pro euklejdovskou metriku a $\eta = 0,5$. Na konci této kapitoly dokážeme, že distribuční plochu tvoří kužel s vrcholem v bodě $[6;4;2]$ a souřadné roviny. Na grafu je rovněž znázorněn rovnostranný trojúhelník, který představuje distribuční plochu pro $\eta = 0,5$. Vrcholy tohoto trojúhelníka jsou na každé souřadné ose na bodě 12. Čerchovaná přímka je osou kužele. Křivka průniku kužele a souřadné roviny je vždy hyperbola.

Obrázek 50: Distribuční plocha při euklejdovské vzdálenosti



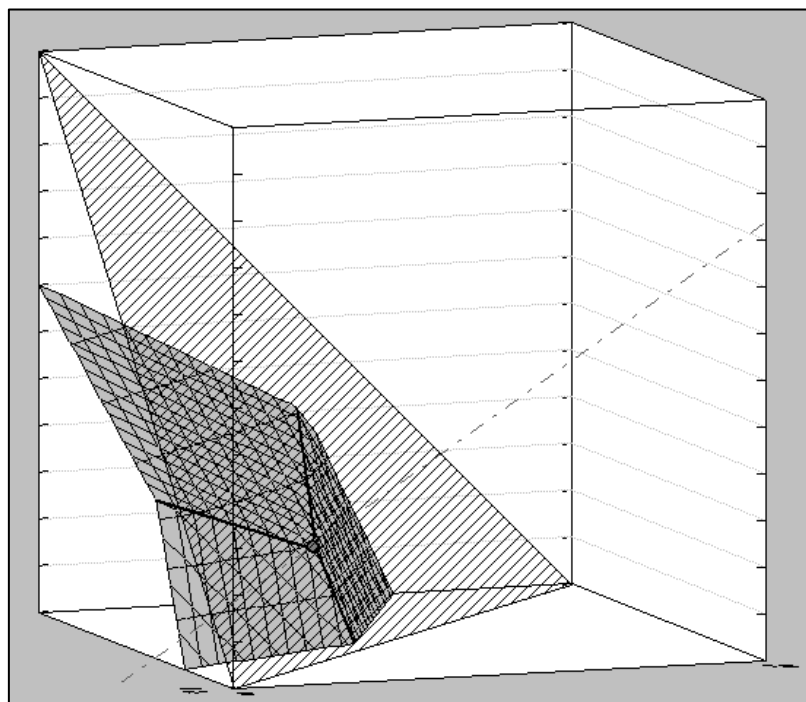
Zdroj: vlastní zobrazení

Obrázek 51: Distribuční plocha při manhattanské vzdálenosti



Zdroj: vlastní zobrazení

Obrázek 52: Distribuční plocha při čebyševovské vzdálenosti



Zdroj: vlastní zobrazení

Obrázek 51 představuje stejný distribuční model avšak pro manhattanskou metriku a opět $\eta = 0,5$. Tentokrát jde o šestiboký jehlan. Obrázek 52 pět zobrazuje stejný distribuční model avšak pro čebyševskou metriku a také $\eta = 0,5$. Tentokrát jde o trojboký jehlan.

Jestliže distribuční plochy na obrázek 51 a 52 jsou zjevně jehlany, tak o tom, že na obrázek 50 je distribuční plocha ve tvaru kužele je potřeba se ještě přesvědčit. K tomu je možno využít tzv. ortogonální invarianty (Bartsch, 1987, s. 480)

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (212)$$

Tabulka 15: Vyčíslení invariantů

| η | A | A_{44} | l_1 | l_2 | $A_{44} \cdot l_1$ |
|--------|---|----------|-------|-------|--------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0 | 2964359 | 297 | -597 | 880414623 |
| 0,2 | 0 | 44354 | 72 | -147 | 3193488 |
| 0,3 | 0 | 3575 | 30 | -64 | 108441 |
| 0,4 | 0 | 554 | 16 | -35 | 8729 |
| 0,5 | 0 | 119 | 9 | -21 | 1071 |
| 0,6 | 0 | 31 | 5 | -14 | 164 |
| 0,7 | 0 | 9 | 3 | -9 | 29 |
| 0,8 | 0 | 4 | 2 | -6 | 6 |
| 0,9 | 0 | 2 | 1 | -4 | 2 |
| 1 | 0 | 2 | 0 | -3 | 0 |

Zdroj: vlastní propočty

Determinant:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Subdeterminant diskriminantu:

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Kvadratický invariant:

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{31} & a_{11} \end{vmatrix}$$

Lineární invariant:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Vypočtené invarianty v závislosti na volbě koeficientu η jsou uvedeny v tabulce 15.

K určení typu kvadratické plochy slouží tabulka 16, jejíž využití si vyžaduje vyčíslení invariant z tabulky 15. Nebudeme se zabývat případem $\eta = 0$, neboť víme, že distribuční plocha je rovina a EDM je pravouhlý trojboký jehlan. Pro $\eta > 0$ je vždy středová kvadrika $A_{44} \neq 0$; $A = 0$; a I_1 . A_{44} a I_2 nejsou zároveň > 0 . To znamená, že v případě euklidovské metriky je na obrázku 50 zobrazena kuželová distribuční plocha.

Na odvozené kuželové EDM se lze dívat z různých stran a lze na ní zobrazovat různé optimální či rovnovážné body. Pokud bude produkt (úroda, výhra) jednoho výrobce (farmáře, hráče apod.) nulová (např. jeden z hráčů je úplně diskriminován), přejde trojrozměrné EDM ve dvojrozměrné. v našem případě půjde o hyperbolickou distribuční křivku, na které lze zobrazovat optimální či rovnovážné body pro dva aktéry.

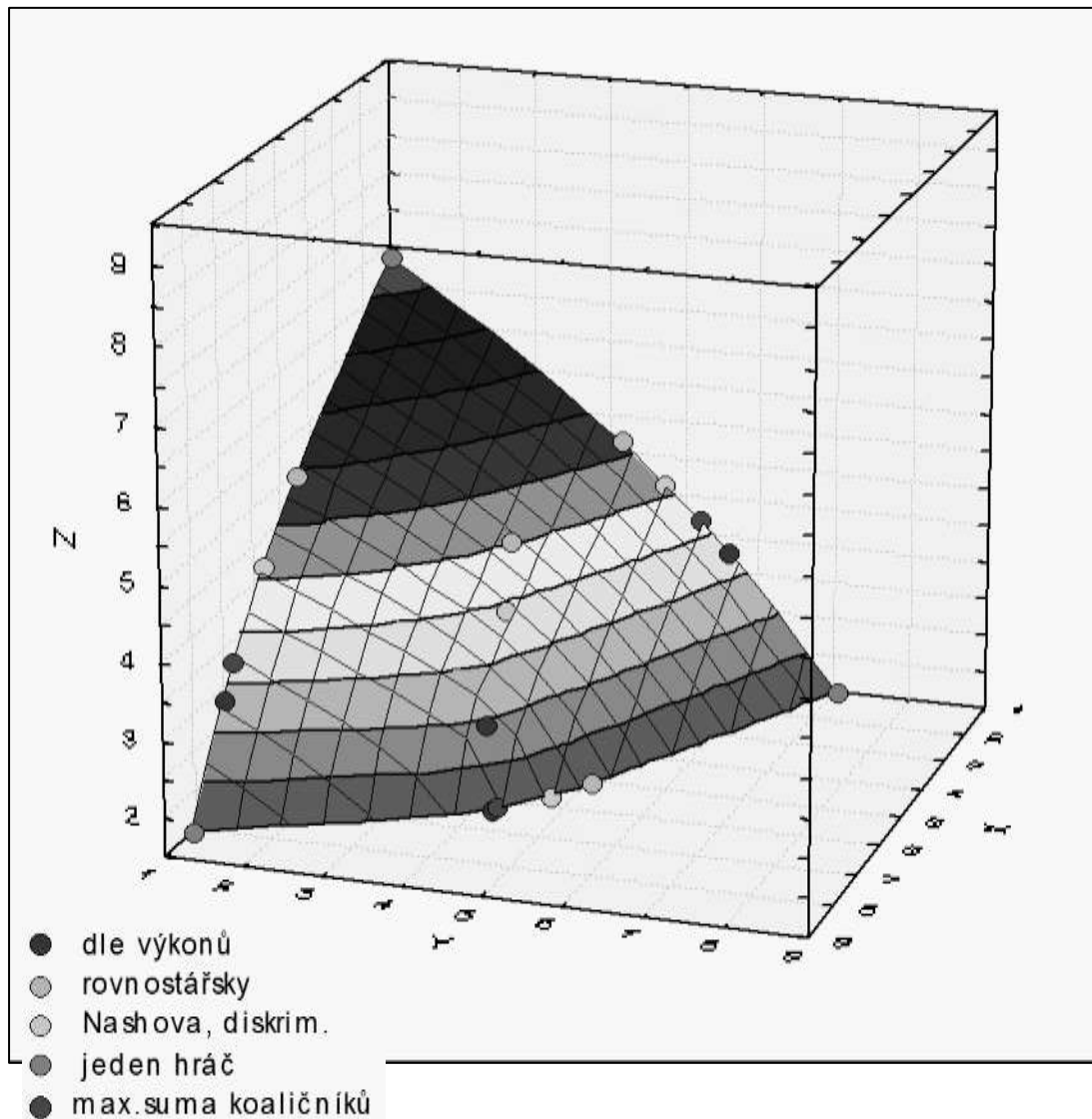
EDM zobrazené na obrázku 53 je spočítáno a nakresleno pro euklidovskou metriku s $\eta = 0,5$; vrchol, tj. optimální bod má souřadnice [6; 4; 2].

Tabulka 16: Určení typu kvadratické plochy

| $A_{44} \neq 0$ středové kvadriky | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|--|----------------------------|
| | $I_1, A_{44} > 0, I_2 > 0$ | I_1, A_{44} a I_2 nejsou zároveň > 0 | |
| $A < 0$ | elipsoid | dvoudílný hyperboloid | |
| $A > 0$ | imaginární elipsoid | jednodílný hyperboloid | |
| $A = 0$ | imaginární kuželová plocha | kuželová plocha | |
| $A_{44} = 0$ nestředové kvadriky | | | |
| | $A < 0, I_2 > 0$ | $A > 0, I_2 < 0$ | |
| $A \neq 0$ | eliptický paraboloid | hyperbolický paraboloid | |
| | $I_2 > 0$ | $I_2 < 0$ | $I_2 = 0$ |
| $A = 0$ | eliptická válcová plocha | hyperbolická válcová plocha | parabolická válcová plocha |

Zdroj: vlastní propočty

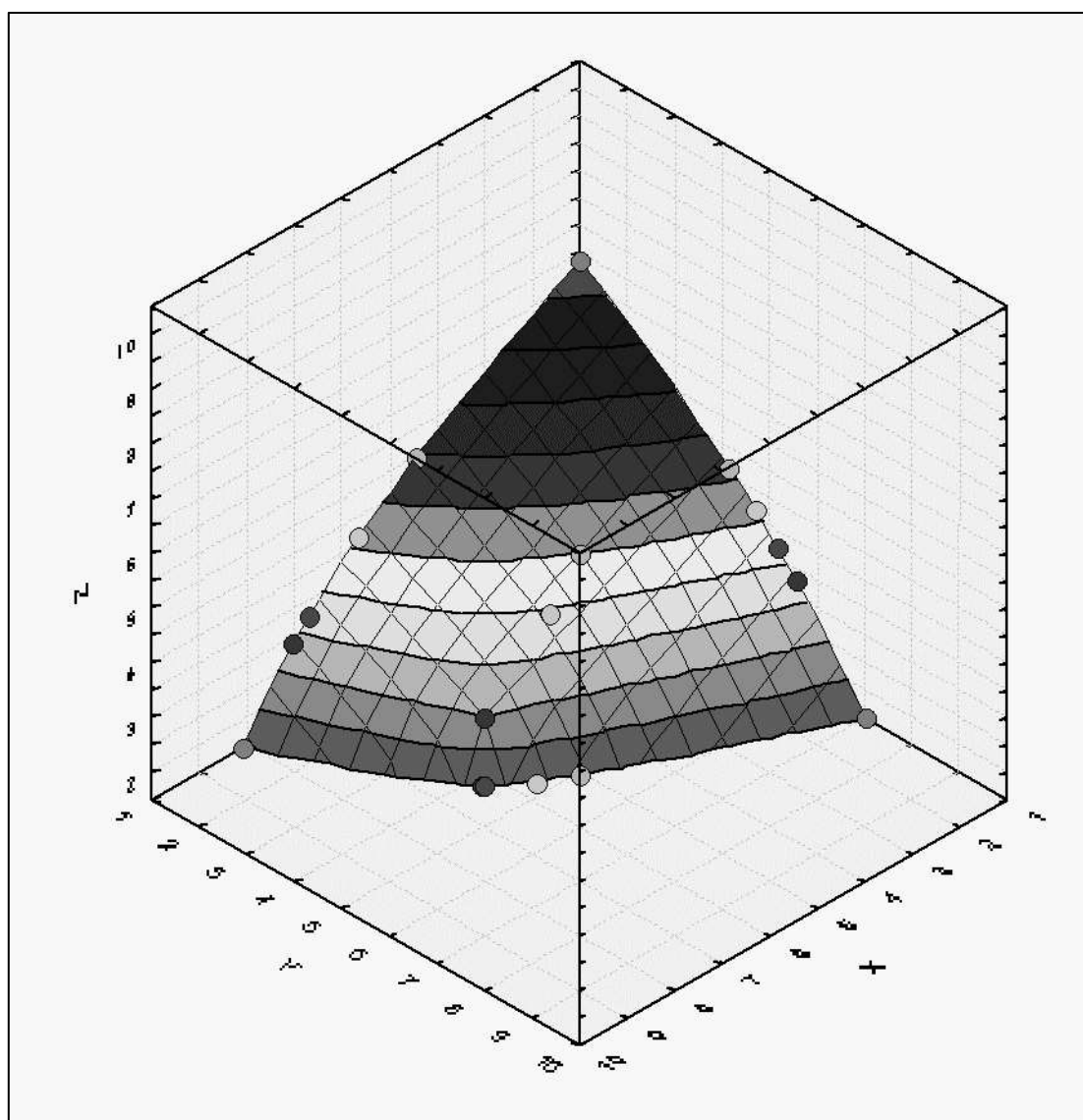
Obrázek 53: Kuželová distribuční plocha s optimálními body



Zdroj: vlastní propočty

Popis jednotlivých bodů bude odpovídat interpretaci z teorie her. Stručný popis významu bodů je uveden v legendě obrázku 53. Šedé body na souřadných osách ve vrcholech distribuční plochy představují maximální výhru jediného hráče, pokud jsou diskriminováni oba zbývající. Body na souřadných plochách představují úplnou diskriminaci jednoho hráče, takže vždy jedna proměnná je nula. Na každé souřadné rovině je hyperbola, na níž jsou (kromě již popsaných vrcholů) 4 body. Např. v souřadné rovině XZ od nejvyššího světle šedého bodu jde o bod rovnostářský, tj. oba nediskriminovaní hráči mají nejvyšší možnou stejnou výhru. Pod ním je bod Nashovy diskriminační rovnováhy, v nichž již při dalším vyjednávání nedochází k zlepšení pozice hráče. Další níže umístěný tmavě šedý bod představuje maximální výhru dvou koaličníků. Nejnižše umístěný tmavě šedý bod má souřadnice maximálních výkonů.

Obrázek 54: Kuželová distribuční plocha s body zobrazená ve směru osy kužele



Zdroj: vlastní propočty

12.3 EDM polynomických produkčních funkcí vyšších řádů

Doposud uvedené příklady ilustrovaly EDM, tj. elementární distribuční model (hranici produkčních možností) jako zobrazení výstupů (produkce, výher apod.) dvou nebo třech aktérů (producentů, výrobců, hráčů, podnikatelů apod.), kteří se nějakým způsobem dělí o určité omezené zdroje (hrají společnou nekooperativní či kooperativní hru) apod. V této kapitole budou prezentovány dvojrozměrné EDM, které jsou dány polynomickými produkčními funkcemi druhého až pátého řádu. Ve všech případech tedy půjde o spojité produkční funkce. Produkční funkci tvoří vždy rostoucí část polynomické funkce vycházející z počátku souřadnic. Pouze v případě polynomu druhého stupně tato funkce nemusí (ale může) procházet počátkem souřadnic, nýbrž

je doplněna spojnicí počátku souřadnic a bodem, kdy parabolická produkční funkce protíná poprvé osu x.

Polynom druhého stupně, tj. parabola je dána obecným vztahem (213) a je spolu s I. a II. derivací, efektivností Ef , ziskem Z a dalšími křivkami zobrazen na obrázku 55.

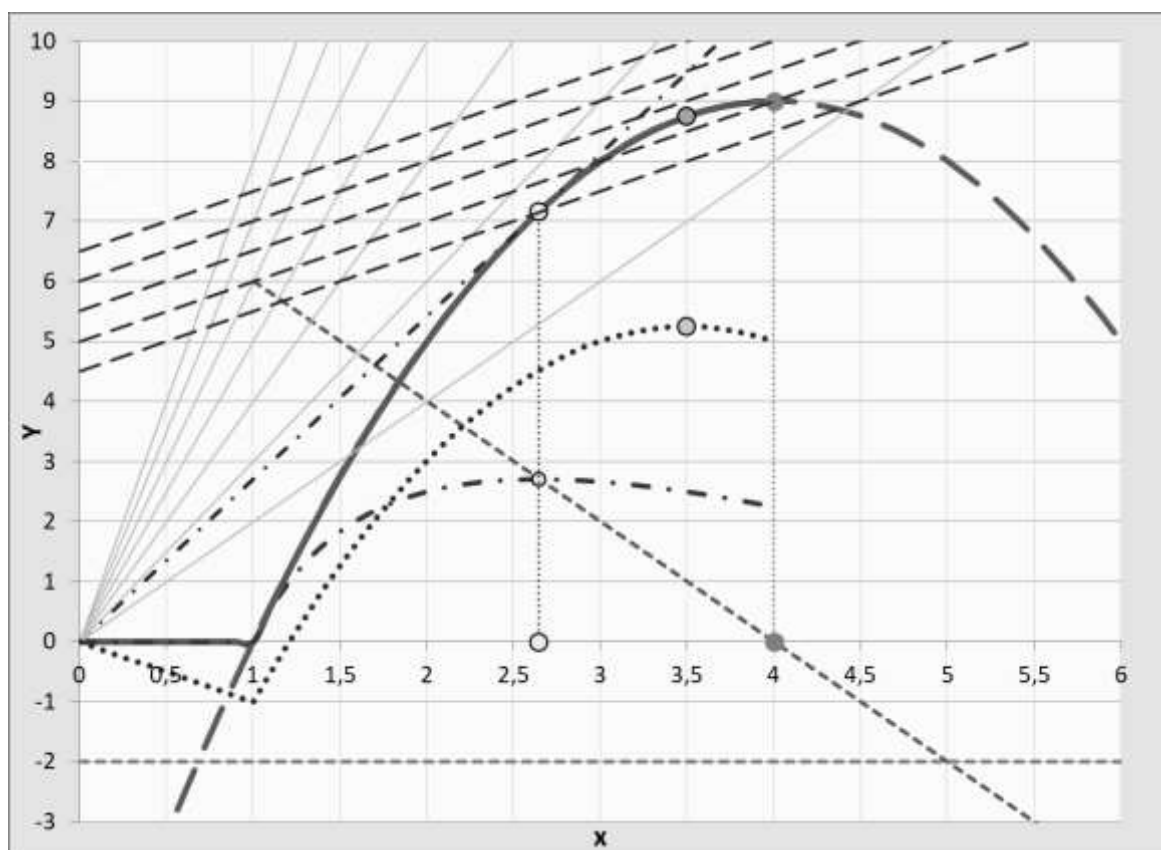
$$Y = -(A + x.B + x^2.C/2) \quad (213)$$

Jako produkční funkci lze využít pouze tu část polynomu, pro který platí $0 \leq x \leq -B/C$, tj. až do vrcholu paraboly. K výpočtu horní meze definičního oboru stačí položit I. derivaci rovnu 0. Tato I. derivace je dána vztahem (214)

$$Y' = -(B + x.C) \quad (214)$$

$$Y'' = -C \quad (215)$$

Obrázek 55: Polynomická produkční funkce druhého řádu



Zdroj: vlastní propočty

Konkrétně kvadratická polynomická produkční funkce na obrázku 55 má parametry $A = 7$; $B = -8$ a $C = 2$.

Pro souřadnice vrcholu paraboly platí $x_{\max} = -B/C = 4$ a $y_{\max} = B^2/(2.C) - A = 9$.

Ke každému polynomu budou současně spočteny derivace až do úrovně nejvyššího stupně, tj. pro polynom 2. stupně I. a II. derivace; pro polynom 3. stupně I.; II. a III. derivace apod. Parametry produkčních funkcí jsou voleny tak, vycházely přehledné hodnoty derivace nejvyšších použitých řádů ve výši koeficientu u nejvyššího řádu polynomické rovnice, které je vždy konstantní. Derivace mají vždy dobrou interpretaci

a jsou nezbytné pro stanovení významných bodů polynomických funkcí, jako je maximum, inflexní bod apod. Na obrázku 55 je I. derivace zobrazena tmavší klesající čárkovanou polopřímku a II. derivace světlejší čárkovanou čarou rovnoběžnou s osou x a pro $y = -C = -2$. Takže přírůstek produkční funkce klesá lineárně a sklon I. derivace je -2 . Záporná konstantní II. derivace znamená, že i 1. derivace je klesající přímka.

Ve všech analyzovaných případech bude spočtena také funkce průběhu efektivnosti Ef a pokud má interpretaci, tak také zisku (Z). Efektivnost Ef je dána podílem celkových výstupů a celkových vstupů, tj. $Ef = Y/x$. Průběh efektivnosti s rostoucími vstupy je zobrazován na polynomických funkcích čerchovanou čarou a je pro polynomickou funkci II. řádu dán rovnicí.

$$Ef = Y/x = -(A/x + B + x.C/2) \quad (216)$$

Rozdíl stejných veličin může mít interpretaci zisku Z ⁷⁴

$$Z = -[A + x.(B+1) + x^2.C/2] \quad (217)$$

Průběh zisku Z zobrazuje tečkovaná čára, která vychází z počátku souřadnic a nejdříve lineárně klesá do záporných hodnot, protože rostou vstupy (náklady) ale výstup např. celkové příjmy jsou v této části nulové. V dalším úseku dochází ke konkávnímu růstu až do bodu maxima zisku, které odpovídá na produkční funkci bodu dotyku tečny, kterou je nejvyšší izokvanta stálého zisku Z . Tyto izokvanty jsou v obrázku 55 označeny čárkovanými stoupajícími rovnoběžkami.

Na obrázku 55 jsou rovněž znázorněny významné body a další podpurná a vysvětlující zobrazení:

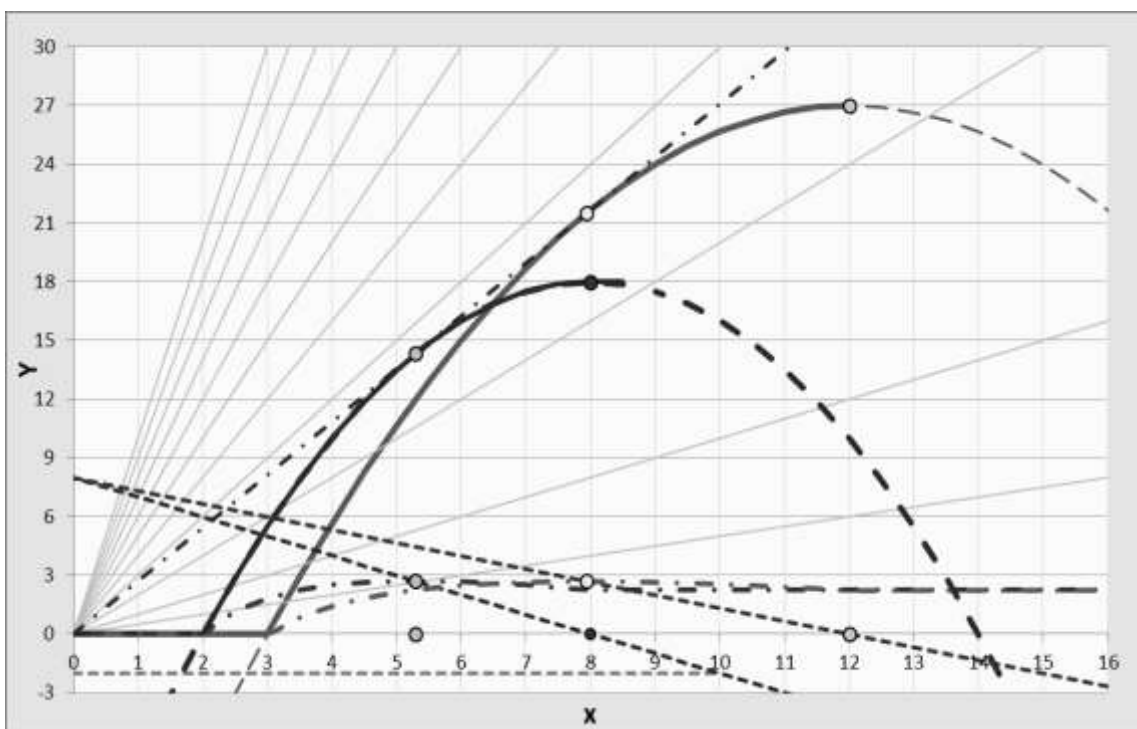
- bod maximální produkce Y , konkrétně na obrázku 55 má souřadnice [4; 9].
- bod maximálního zisku Z je v místě, kde se produkční funkce dotýká (má tečnu) izokvanty s nejvyšším ziskem (čárkované rovnoběžky v levém horním rohu obrázku). Tento bod má souřadnice [3,5; 8,75].
- bod maximální efektivnosti je v místě, kde se produkční funkce dotýká (má tečnu – vyznačená čerchovaně) izokvanty s nejvyšší efektivností (tenké šedé přímky tvořící svazek s průsečíkem v počátku souřadnic). Tento bod má souřadnice [2,6; 7,04]. O tom, že jde o bod s maximální efektivností, svědčí také průběh efektivnosti vzhledem k rostoucím zdrojům, nakreslený čerchovanou čarou.
- Za bodem vrcholu produkční funkce, tj. pro $x > x_{\max Y}$, je již iracionální kvadratickou polynomickou produkční funkci využívat. Klesající část produkční funkce, nemá smysl využívat, neboť již dochází k částečnému nebo i úplnému znehodnocování vstupů (výrobních faktorů, sázek apod.). Při větším přísunu vstupů (výrobních faktorů) je ovšem možno postupovat čistě extenzivně, tj. násobně využít technologii, danou příslušným významným bodem produkční funkce. Společensky nejefektivnější se jeví využít takto bod maximální efektivnosti, tj. pokračovat po produkční funkci po čerchované tečně.

⁷⁴ V některých produkčních funkcích jsou vstupy a výstupy definovány tak, že rozdíl výstupů a vstupů nemá interpretaci, např. jsou-li výstupem ujeté km a vstupem je čas. Podílem je rychlost, ale rozdíl nemá smysluplnou interpretaci. Pokud jsou výstupem např. celkové příjmy a vstupem celkové náklady, pak jejich rozdíl je ekonomický zisk apod.

- Silná úsečka z počátku souřadnic do bodu $[0; 1]$, představuje tu část produkční funkce, kde je přiděl vstupů (výrobních faktorů) tak malý, že nestačí na vytvoření nějakého výstupu (produkce), např. zálivka je tak slabá, že semena ani nevzklíčí, rostliny nerostou apod.

Pro zobrazení elementárního distribučního modelu (EDM) lze využít pro oba aktéry stejnou produkční funkci, pokud např. oba produkují stejný výrobek či plodinu apod. Častější případ je, že každého z aktérů charakterizuje jiná produkční funkce. Pro ilustraci takového případu jsou na obrázku 56 dvě různé kvadratické produkční funkce. Byly generovány tak, že mají shodnou maximální efektivnost, tj. mají společnou čerchovanou tečnu vedenou z počátku souřadnic. Společná tečna ale není pro další výklad nezbytná.

Obrázek 56: Dvě kvadratické produkční funkce se stejnou maximální efektivností



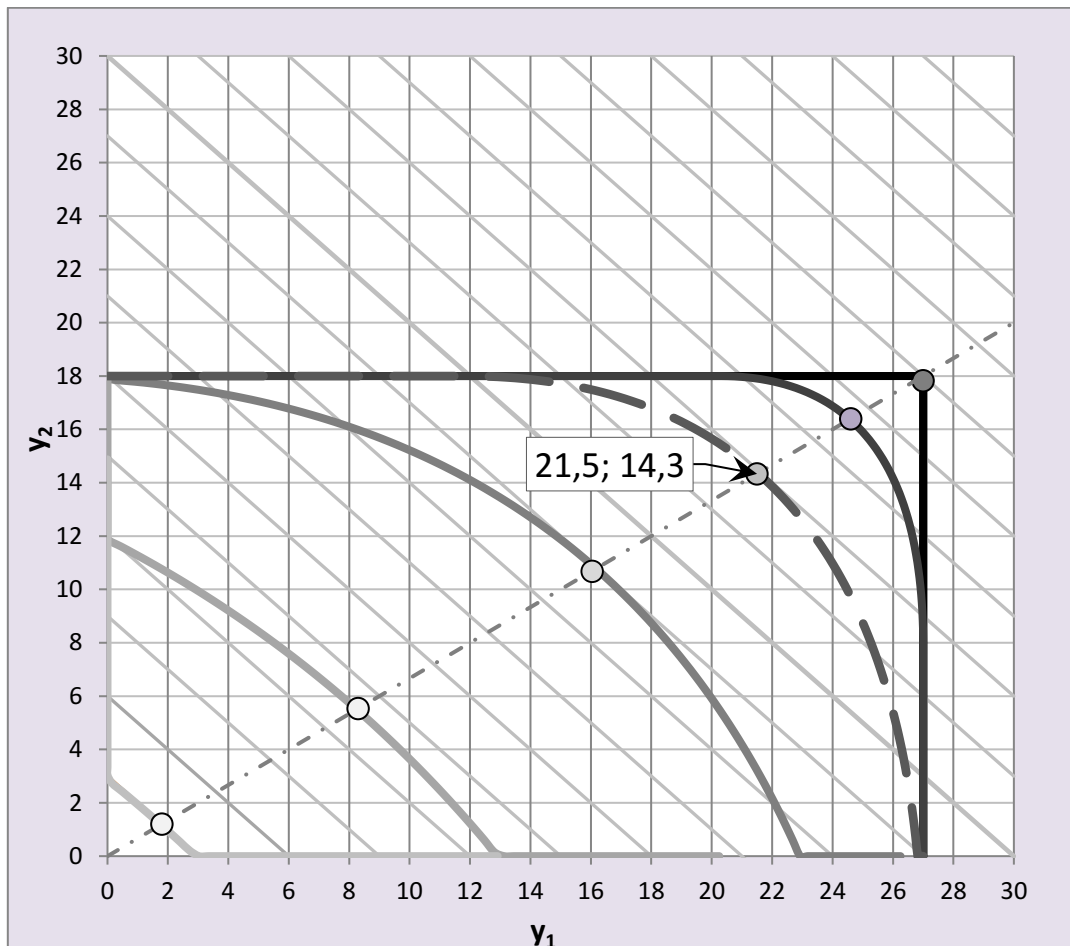
Zdroj: vlastní propočty

EDM na obrázku 57 využívá produkční funkce zobrazené na obrázku 56. Jde o dvě produkční funkce s různými maximálními výstupy (produkce, výhrami). Jedna s maximem 18 a druhá s maximem 27. Maximální efektivnost je v obou případech 2,25.

Obrázek 57 zobrazuje rovněž izokvanty stálého součtu výstupů obou produkčních funkcí, jako klesající rovnoběžky se sklonem 45° . Jednotlivé křivky uvnitř obdélníku o stranách 18 a 27 se liší podle toho, jaké celkové množství vstupů bylo použito. Čárkovaná hranice EDM odpovídá celkovému množství vstupů pro využití bodů s maximální efektivností na obou produkčních funkcích, tj. pro výstupy $21,5 + 14,3 = 35,8$. Pokud je zdrojů nadbytek (tj. jsme nad body max. efektivnosti) lze se dostat až do bodu $[18; 27]$. Body na ose x představují situaci, kdy jsou veškeré vstupy použity prvním aktérem, který využívá první produkční funkci, tj. s maximem 27 a na ose y jsou veškeré vstupy využity druhým aktérem, jehož činnost je charakterizovaná druhou produkční funkcí, tj. s maximem 18. Na každé zobrazené EDM je vyznačen bod

s maximálním součtem výstupů, (tj. y_1+y_2) který je vzhledem k rozdělení vstupů největší. Všechny tyto body leží na čerchované přímce $y_2 = y_1 \cdot 27/18$. Ze společenského hlediska je optimální, pokud je optimální množství zdrojů rozděleno právě tak, aby oba aktéři využívali bod maximální efektivity. V tom případě dochází k tomu, že se ze společenského hlediska nejlépe využívají vstupy (zdroje), neboť z každé jednotky vstupů (zdrojů) je vytěžen největší výstup (produkt, výhra apod.)

Obrázek 57: EDM polynomicke produkční funkce druhého řádu



Zdroj: vlastní propočty na základě obrázku 22a

Analogicky lze odvodit EDM pro kubickou produkční funkci, která je daná vztahem (218). Tato funkce již má také inflexní bod. Díky tomu má část nad proporcionalní a část pod proporcionalní

$$Y = A + x.B + x^2.C/2 + x^3.D/6 \quad (218)$$

$$Y' = B + x.C + x^2.D/2 \quad (219)$$

$$Y'' = C + x.D \quad (220)$$

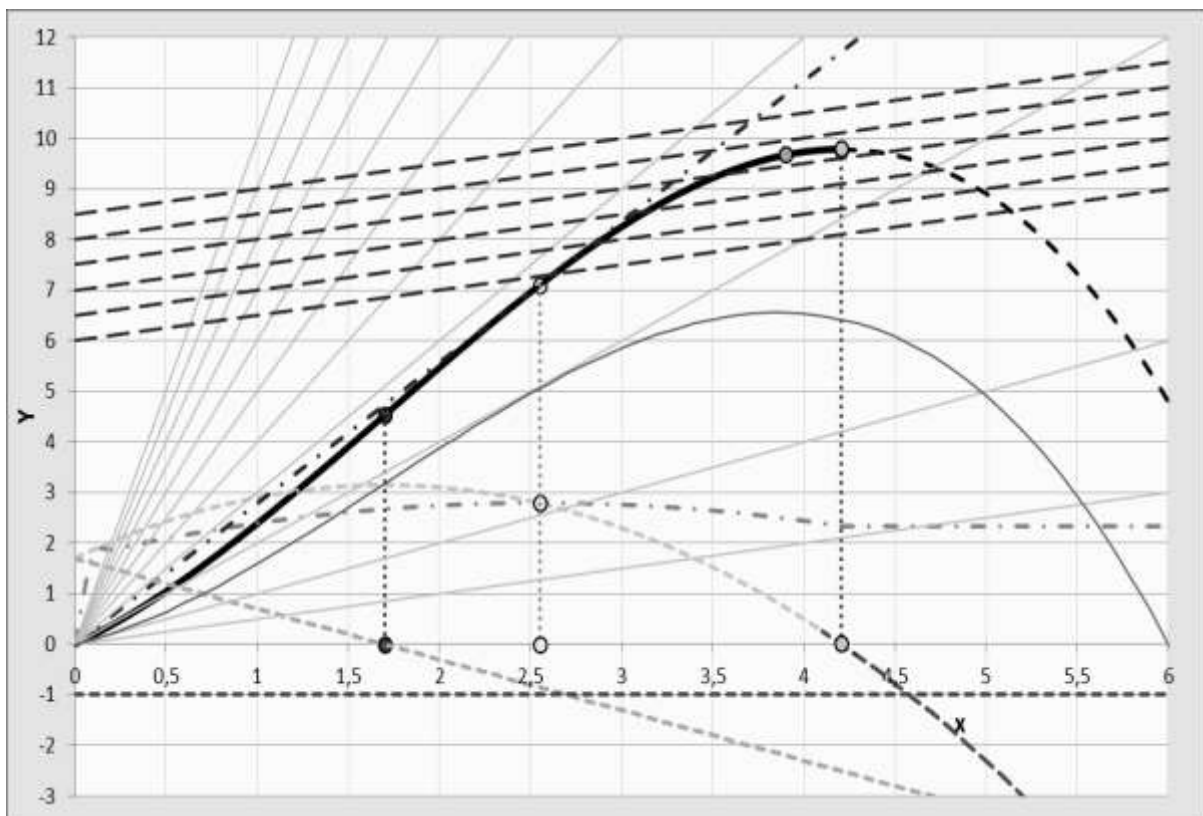
$$Y''' = D \quad (221)$$

Funkce efektivity pro $A = 0$ pro obecnou kubickou polynomicke produkční funkci

$$Ef = Y/x = B + x.C/2 + x^2.D/6 \quad (222)$$

Na obrázku 58 je zobrazena konkrétní kubická polynomická produkční funkce s parametry $A = 0$; $B = 0,9$; $C = 1,7$ a $D = -1$. Pro konstrukci EDM bude využita pro oba aktéry jen tato produkční funkce. Funkce efektivity je nakreslena pro tuto produkční funkci na obrázku 58 čerchovanou čarou. V bodě maxima jí protíná křivka druhé derivace, která má parabolický průběh, jak je zřejmé ze vztahu (219). Protože izokvantami efektivity jsou přímky tvořící svazek přímek s průsečíkem v počátku souřadnic (viz šedé čáry), tak významný bod s maximální efektivitou lze nalézt také jako bod dotyku té izokvanty, která tvoří tečnu k produkční funkci, což je rovněž v obrázku 58 nakresleno. Šedou plnou čarou je zde také zakreslena funkce průběhu zisku.

Obrázek 58: Polynomická produkční funkce třetího řádu



Zdroj: vlastní propočty

Pro každý významný bod lze snadno nalézt obecné vyjádření pomocí uvedených parametrů. Souřadnice všech klíčových bodů této kubické produkční funkce jsou v tabulce 17.

Jako produkční funkci lze využít pouze část polynomu, pro který platí $0 \leq x \leq x_{\max Y}$, tj. až do vrcholu funkce v našem konkrétním případě v bodě $[4,2; 9,8]$.

Tabulka 17: Souřadnice klíčových bodů kubické produkční funkce.

| polynom třetího řádu | | souřadnice bodů | |
|----------------------|-----------------------|-----------------|-----|
| | Významné body | x | y |
| 1 | maximální produkt | 4,2 | 9,8 |
| 2 | maximální zisk | 3,8 | 9,6 |
| 3 | maximální efektivnost | 2,6 | 7,2 |
| 4 | inflexní bod | 1,7 | 4,5 |

Zdroj: vlastní propočty

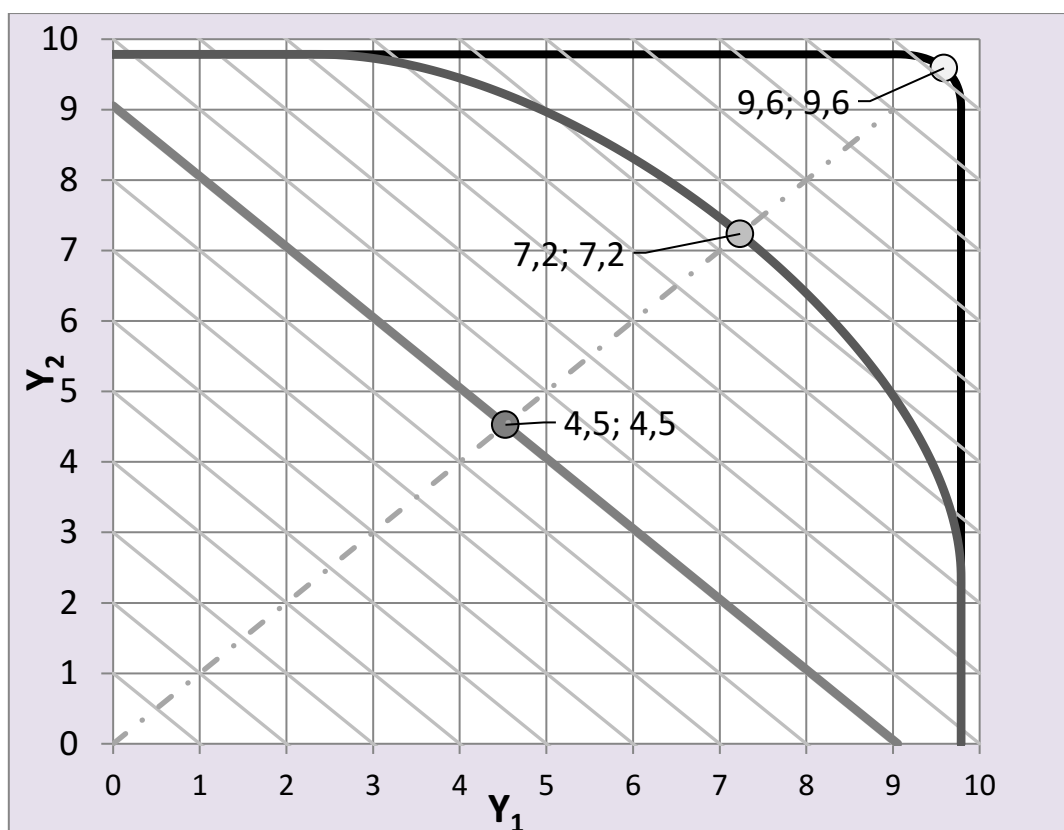
Na obrázku 58 jsou kromě uvedené produkční funkce znázorněny rovněž významné body a další podpůrná a vysvětlující zobrazení podobně jako na obrázcích 55 či 56 pro kvadratickou produkční funkci:

- bod maximálního zisku je v místě, kde se produkční funkce dotýká (tečna) přímková izokvanta s nejvyšším ziskem (čárkované šikmo stoupající rovnoběžky v horní části obrázku),
- bod maximální efektivnosti je podobně jako v případě kvadratické produkční funkce v místě, kde se produkční funkce dotýká (je tečnou – vyznačeno čerchovaně) izokvanty s nejvyšší efektivností (tenké šedé přímkové tvoří svazek s průsečíkem v počátku souřadnic). Maximální efektivnost je zřejmá také z průběhu efektivnosti, která je nakreslená čerchovanou čarou,
- Za bod vrcholu produkční funkce, tj. pro $x > x_{\max Y}$, již není racionální kubickou polynomickou produkční funkci využívat. Nelze totiž akceptovat klesající část funkce, podobně jako u kvadratické produkční funkce,
- Produkční funkce vychází z počátku souřadnic a až do inflexního bodu je nadproporcionální, tj. má kladnou druhou derivaci, která má lineární průběh jak je zřejmé z výrazu (220). Jinými slovy v tomto úseku roste produkční funkce stále rychleji. Od inflexního bodu doprava je již podproporcionální, tj. druhá derivace je záporná, produkční funkce roste stále pomaleji, až začne od bodu maxima produkce klesat.

Elementární distribuční model EDM odpovídající kvadratické produkční funkci na obrázku 57 je nakreslen analogicky pro kubickou produkční funkci na obrázku 59. V tomto případě byla použita dvakrát uvedená produkční funkce (obrázek 58). Dvě konkávní křivky a jedna úsečka představují ohraničení EDM (hranici produkčních možností), která jsou proto symetrická a odpovídají optimálnímu celkovému množství vstupů (zdrojů) v případě prostřední šedé křivky. Oba aktéři zde mohou využít bod s maximální efektivností. Je zde rovněž vyznačeny body maxima součtu výstupů (produkce, výhry) obou aktérů, které odpovídají využití bodu s maximální efektivností produkční funkce, kde je v obou případech výstup 7,2. Takže maximální součet produkcí je dvakrát výnos v bodě maximální efektivnosti, tj. $2 \times 7,2 = 14,2$. Černá křivka předpokládá využití bodu s maximálním ziskem, kde je výstup $2 \times 9,6$. Ve světle šedou přímkou se hranice EDM promění, pokud je využit inflexní bod produkční funkce, kde je výstup 4,5. Součet výstupů je pak konstantní bez ohledu na to, kolik který aktér dostává zdrojů, jsou plně substituovatelní.

Tato zjištění mají obecnou povahu a jsou jedním z výsledků výzkumu v této oblasti.

Obrázek 59: Polynomická produkční funkce třetího řádu



Zdroj: vlastní propočty

Analogicky lze odvodit EDM pro polynomickou produkční funkci čtvrtého řádu, která je daná vztahem (223). Tato funkce rovněž disponuje inflexním bodem. Díky tomu má též část nad proporcionalní a část pod proporcionalní. Výrazy (224) až (227) představují její I. až IV. derivaci. Parametry jsou voleny na stejném principu jako v předchozích případech, takže IV. derivace je konstantní, rovna parametru E. Tato polynomická funkce má oproti kubické produkční funkci **větší prohnutí** v oblasti inflexního bodu. To se jeví jako velmi zajímavá vlastnost, neboť tohoto efektu nelze dosáhnout jakoukoliv kombinací parametrů kubické produkční funkce.

$$Y = A + x.B + x^2.C/2 + x^3.D/6 + x^4.E/24 \quad (223)$$

$$Y' = B + x.C + x^2.D/2 + x^3.E/6 \quad (224)$$

$$Y'' = C + x.D + x^2.E/2 \quad (225)$$

$$Y''' = D + x.E \quad (226)$$

$$Y'''' = E \quad (227)$$

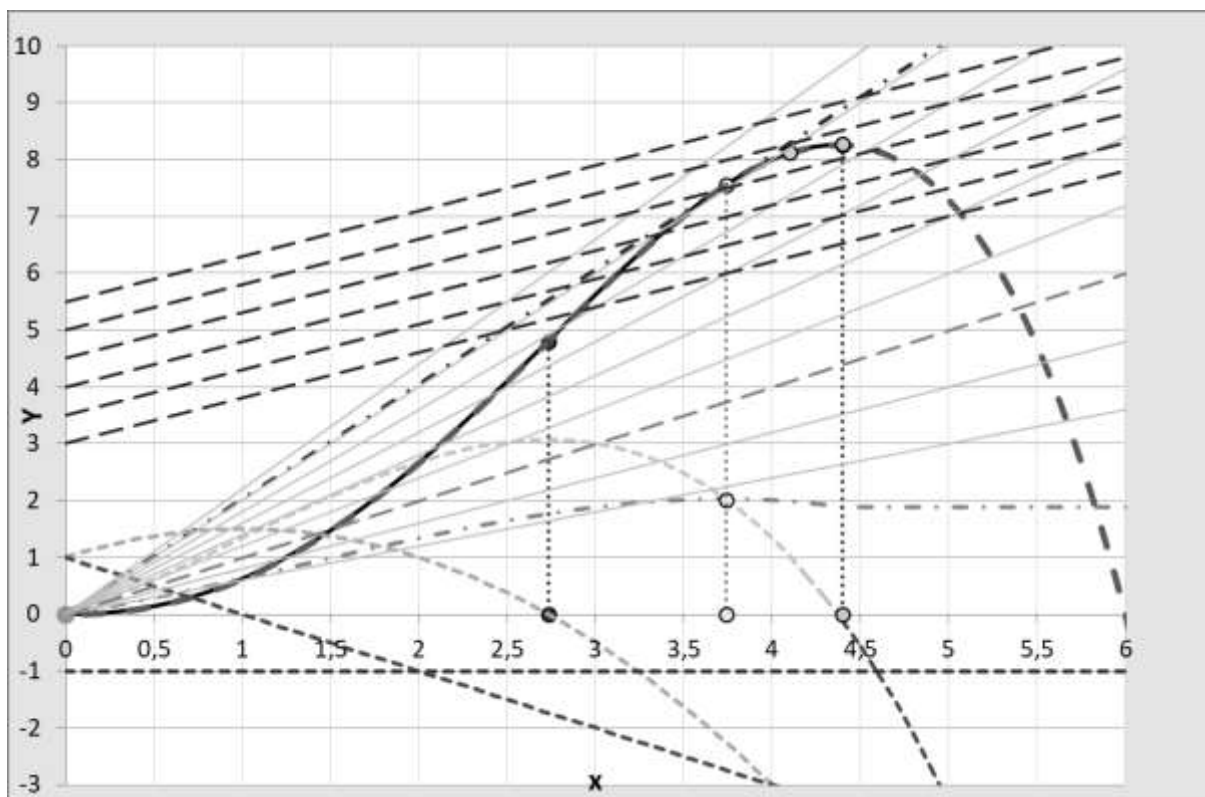
Funkce efektivity pro $A = 0$ pro obecnou polynomickou produkční funkci IV. řádu

$$Ef = Y/x = B + x.C/2 + x^2.D/6 + x^3.E/24 \quad (228)$$

Na obrázku 60 je zobrazena konkrétní polynomická produkční funkce s těmito konkrétními parametry $A = 0$; $B = 0$; $C = 1$; $D = 1$ a $E = -1$.

Jako produkční funkci lze opět využít pouze tu část polynomu, pro který platí $0 \leq x \leq x_{\max Y}$, tj. až do vrcholu funkce v bodě [4,4; 8,3].

Obrázek 60: Polynommická produkční funkce čtvrtého řádu



Zdroj: vlastní propočty

Funkce efektivnosti je na obrázku 60 nakreslená opět čerchovanou čarou. V bodě maxima jí protíná křivka druhé derivace, která má kubický průběh jak je zřejmé ze vztahu (224). Izokvantami stálé efektivnosti jsou šedé přímky ze svazku s průsečíkem v počátku souřadnic. Ta přímka z tohoto svazku, která je současně tečnou k produkční funkci, se jí dotýká v bodě maximální efektivnosti, což je rovněž v obrázku 60 nakresleno.

Tabulka 18: Souřadnice klíčových bodů polynommické produkční funkce 4. řádu.

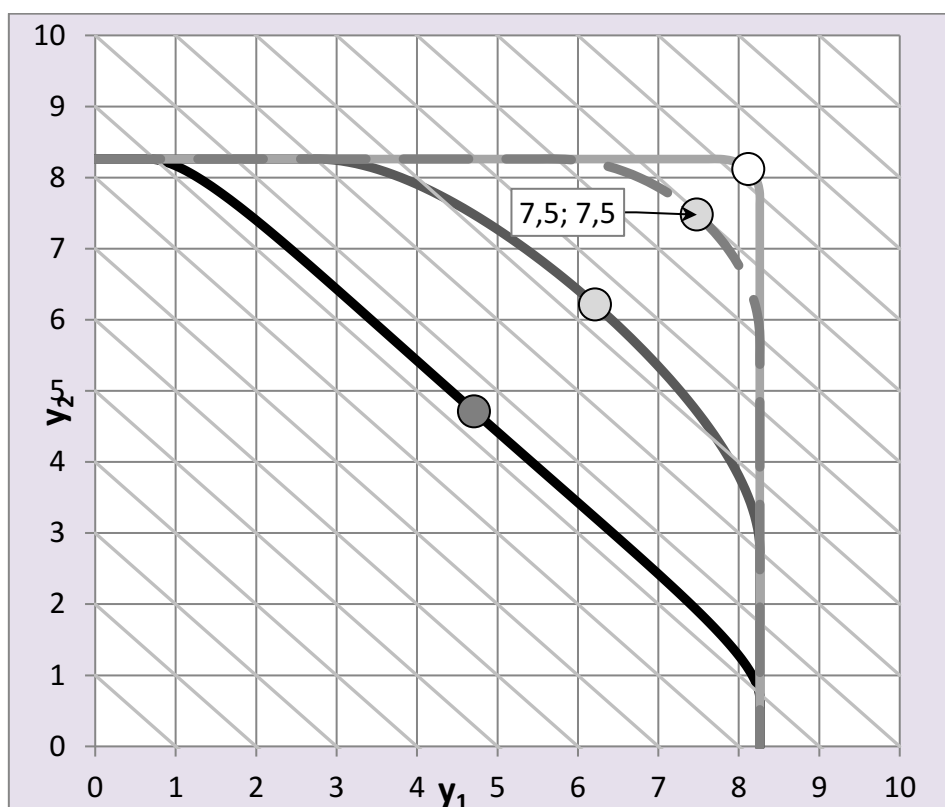
| polynom 4. řádu | | souřadnice | |
|-----------------|-----------------------|------------|-----|
| | Významné body | x | y |
| 1 | maximální produkt | 4,4 | 8,3 |
| 2 | maximální zisk | 4,1 | 8,1 |
| 3 | maximální efektivnost | 3,7 | 7,5 |
| 4 | inflexní bod | 2,7 | 4,7 |

Zdroj: vlastní propočty

Souřadnice všech klíčových bodů polynommické produkční funkce 4. řádu jsou v tabulce 18. Inflexní bod má souřadnici x určenou průsečíkem II. derivace s osou x.

Elementární distribuční model EDM odpovídající polynomicke produkční funkci 4. stupně z obrázku 60 je nakreslen na obrázku 61. V tomto případě byla použita dvakrát produkční funkce (223) na obrázku 60. Konkávní křivky představují ohraničení EDM, které je symetrické a odpovídá celkovému množství vstupů. Černá křivka odpovídá dvojnásobnému využití inflexního bodu s celkovými vstupy $x_1+x_2 = 5,4$, následuje světlejší křivka, ke $x_1+x_2 = 6,4$. Čárkovaná křivka pro $x_1+x_2 = 7,4$ odpovídá dvojnásobnému využití bodu s maximální efektivností, kde $y_1=y_2 = 7,5$. Poslední nejsvětější křivka s $x_1+x_2 = 8,2$ odpovídá dvojnásobnému využití bodu s maximálním ziskem, kde $y_1 = y_2 = 8,1$. Všechny křivky protínají souřadné osy v hodnotě $y_1 = y_2 = 8,3$, což je maximální produkt pro každého z aktérů.

Obrázek 61: EDM polynomicke produkční funkce čtvrtého řádu



Zdroj: vlastní propočty

Analogicky lze odvodit EDM také pro polynomicke produkční funkci pátého řádu, která je daná vztahem (228). Tato funkce též disponuje inflexním bodem, který jí rozděluje na část nad proporcionalní a pod proporcionalní. Výrazy (229) až (233) představují I. až V. derivaci. Parametry jsou voleny na stejném principu jako v předchozích případech, takže V. derivace je konstantní, rovna parametru F. Tato polynomicke funkce disponuje již značným prohnutím v oblasti inflexního bodu. Toto prohnutí je významnou vlastností produkčních funkcí při modelování ekonomických procesů.

$$Y = A + x.B + x^2.C/2 + x^3.D/6 + x^4.E/24 + x^5.F/120 \quad (228)$$

$$Y' = B + x.C + x^2.D/2 + x^3.E/6 + x^4.E/24 \quad (229)$$

$$Y'' = C + x.D + x^2.E/2 + x^3.F/6 \quad (230)$$

$$Y''' = D + x.E + x^2.F/2 \quad (231)$$

$$Y'''' = E + x.E \quad (232)$$

$$Y''''' = F \quad (233)$$

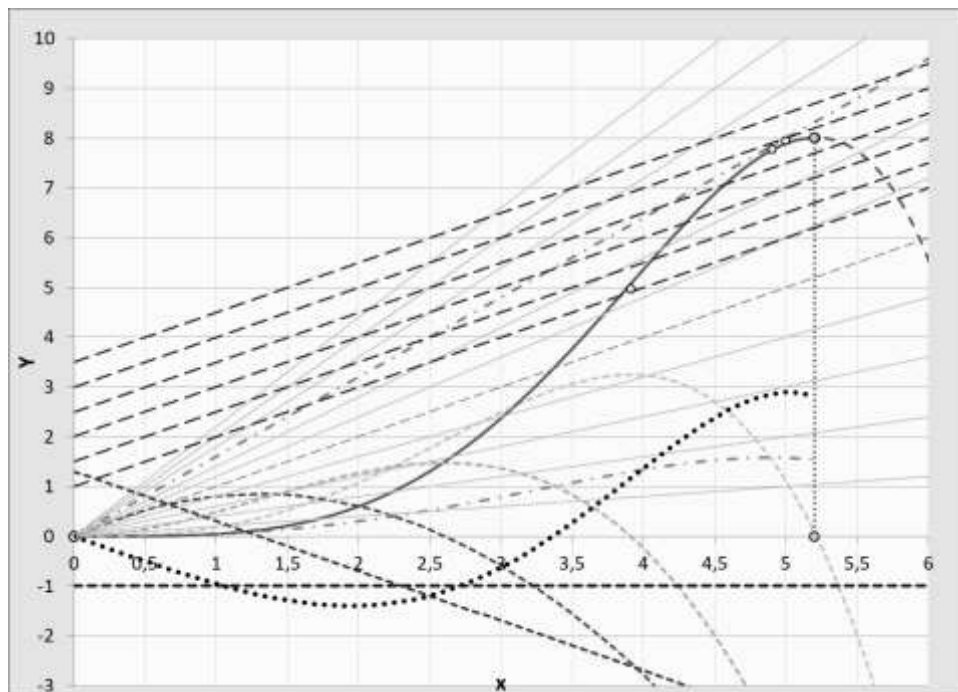
Funkce efektivnosti pro $A = 0$ pro obecnou polynomickou produkční funkci V. řádu

$$E_f = Y/x = B + x.C/2 + x^2.D/6 + x^3.E/24 + x^4.F/120 \quad (234)$$

Jako produkční funkci lze opět využít pouze monotónně rostoucí část polynomu (228), pro který platí $0 \leq x \leq x_{\max Y}$, tj. od počátku souřadnic až do vrcholu funkce (228) v našem konkrétním případě v bodě [5,2; 8,0]. Pokračování vkládání zdrojů nad $x_{\max Y}$ již není žádoucí, neboť by došlo k poklesu produkce. Vyšší produkce lze ale dosáhnout např. extenzivním využitím technologie odpovídající kterémukoliv z významných bodů produkční funkce. Jak ukazují názorně všechna v této kapitole uvedená EDM, ze společenského hlediska je nejlépe využít bodu s maximální efektivností. V tom případě je totiž dosahováno maximálního společného výstupu (produktu, výhry apod.) To platí nejen pro dva aktéry nýbrž i pro více či mnoho aktérů, protože jde o společensky nejvhodnější variantu.

Na obrázku 62 je zobrazena konkrétní polynomická produkční funkce s těmito parametry $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; $D = -0$; $E = 1,303$ a $F = -1$. Popis obrázku je analogický jako v předchozích případech.

Obrázek 62: Polynomická produkční funkce pátého řádu



Zdroj: vlastní propočty

Konkrétní polynomická produkční funkce 5. řádu je nakreslená tučnou plnou čarou vychází z počátku souřadnic, nad proporcionálně stoupá až do inflexního bodu, načež

roste pod proporcionálně do bodu maximálního zisku a končí v bodě maximální produkce. Čárkovane je naznačena klesající část polynomu, kterou již nelze využít jako racionální produkční funkci. Na obrázku 62 jsou zakresleny čárkovane I. až V. derivace. Čím vyšší derivace, tím tmavší čára. Čerchovaně je v obrázku zakreslený průběh efektivnosti. Jejím vrcholem prochází I. derivace produkční funkce. Souřadnice x Inflexního bodu je dána průsečíkem II. derivace s osou x. Tečkovaně je v grafu zakreslen průběh zisku (Z) na produkční funkci. Ten rovněž vychází z počátku souřadnic, nejdříve klesá do záporných hodnot, načež roste až do svého maxima v bodě [5; 7,9], kde je nejvyšší zisk 2,9. Graf je doplněn izokvantami stálé efektivnosti, které tvoří svazek přímek s průsečíkem v počátku souřadnic a jsou nakresleny světle šedou tenkou čarou. Izokvanty stálého zisku představují stoupající čárkované rovnoběžky. Na obrázku je také čárkovane vyznačena ta izokvanta stálé efektivnosti, která je rovnoběžná s izokvantami stálého zisku. Ta je významná pro dobrou orientaci v obrázku, neboť je to izokvanta nulového zisku a současně efektivnosti 1.

Souřadnice všech klíčových bodů polynomické produkční funkce 5. řádu jsou v tabulce 19. Inflexní bod má souřadnici x určenou průsečíkem II. derivace s osou x. Polynomická funkce pátého řádu zřetelně ilustruje, **prohnutí** produkční funkce v oblasti inflexního bodu, které významně roste spolu s řádem polynomické funkce.

Tabulka 19: Souřadnice klíčových bodů polynomické produkční funkce 5. řádu.

| polynom 5. řádu | | 1. funkce | |
|-----------------|-----------------------|-----------|-----|
| | Významné body | x | y |
| 1 | maximální produkt | 5,2 | 8,0 |
| 2 | maximální zisk | 5,0 | 7,9 |
| 3 | maximální efektivnost | 4,9 | 7,8 |
| 4 | inflexní bod | 3,9 | 5 |

Zdroj: vlastní propočty

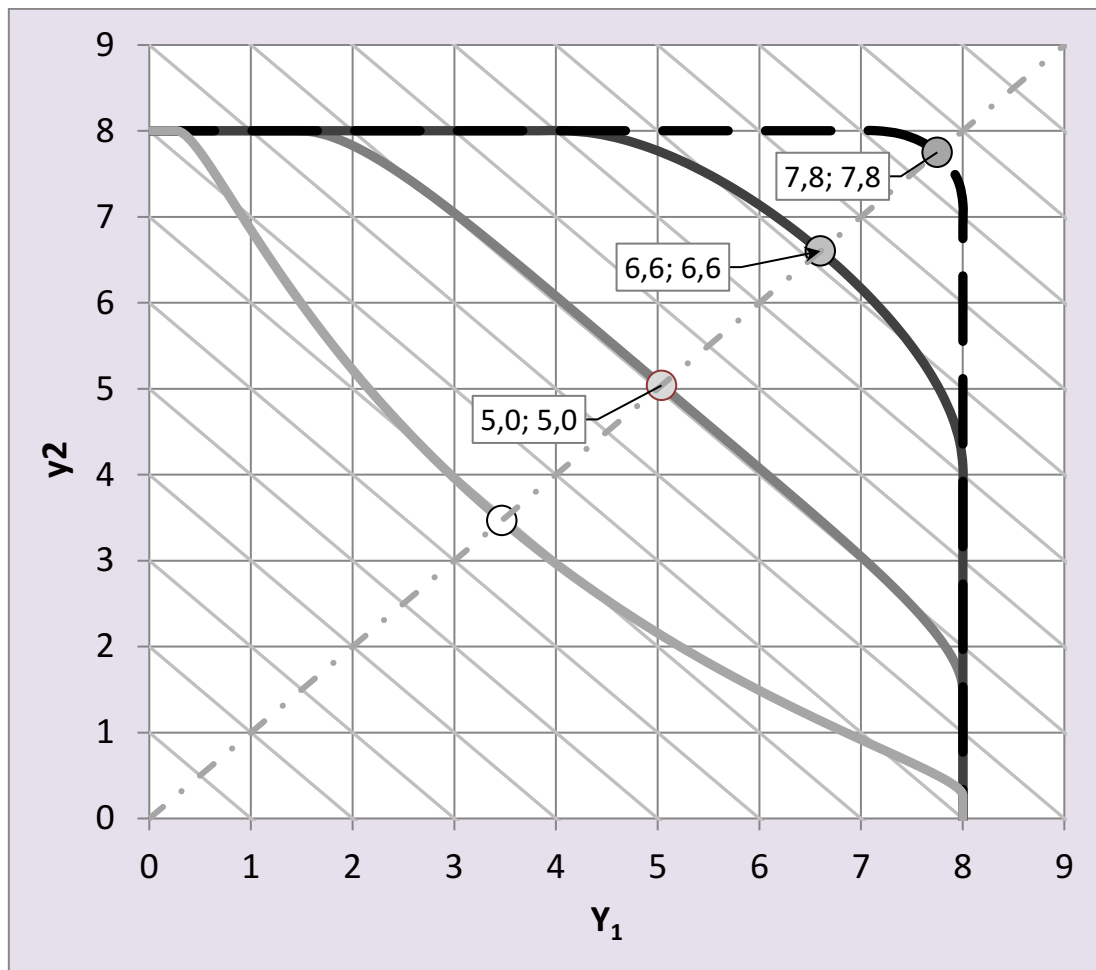
Elementární distribuční model EDM odpovídající polynomické produkční funkci V. stupně je nakreslen na obrázku 63. V tomto případě byla použita dvakrát produkční funkce (228) z obrázku 62. Konkávní křivky představují ohraničení EDM, které je tudíž symetrické a odpovídá určitému množství souhrnu vstupů. Tmavá čárkovaná křivka odpovídá dvojnásobnému využití bodu s maximální efektivností, kde $x_1+x_2 = 9,8$ a $y_1 = y_2 = 7,8$. Následující světlejší křivka odpovídá $x_1+x_2 = 8,8$ a $y_1 = y_2 = 6,6$. Ještě světlejší plochá křivka odpovídá dvojnásobnému využití inflexního, kde $x_1+x_2 = 7,8$ a $y_1 = y_2 = 5$.

Uvedený model umožňuje generovat také, za jakých podmínek by již EDM nebylo konkávní. Poslední šedá křivka představuje hranici EDM, které by již nebylo konkávní, což není přípustné. Předělem mezi přípustnými a nepřípustnými hranicemi EDM z hlediska konkávnosti je EDM sestavené pro takové množství zdrojů, které odpovídá inflexnímu bodu produkční funkce u obou použitých produkčních funkcí. Poslední nejsvětlejší křivky již není konkávní, a proto není přijatelná.

Křivky protínají souřadné osy pro $y_1 = y_2 = 8,0$, což je maximální produkt. Jsou zde rovněž vyznačeny body maxima součtu výstupů (produkce, výhry). Tyto body jsou

dány body dotyku tečny, která je současně nejvyšší izokvantou součtů výstupů. Těmito izokvantami jsou šedě zakreslené rovnoběžné klesající úsečky pod sklonem 45°.

Obrázek 63: EDM polynomické produkční funkce V. řádu



Zdroj: vlastní propočty

Kapitola 12 a zejména subkapitola 12.3 obsahuje řadu nových poznatků. Ukázalo se, že polynomické funkce jsou velmi vhodným, tvárným i inspiračním nástrojem pro konkrétní vyhledávání a v širším slova smyslu modelování produkčních funkcí. Polynomická produkční funkce je sice vždy jen částí příslušného polynomu, avšak ve všech případech má všechny náležitosti, jako je pod proporcionalní a nad proporcionalní část, má všechny významné body apod.

Jde nejen o nástroj modelování, analyzování a prognózování vývoje, nýbrž i o účelný výzkumný nástroj. Jeho pomocí a s využitím elementárních distribučních modelů tzv. EDM lze řešit obecný problém výběru vhodných významných bodů produkčních funkcí pro společenské využití. Součet produkcí představuje společenské hledisko, pročez lze hledat společensky efektivní řešení. Např. na obrázku 57 je zřejmé, že maximální společný produkt je na uhlopříčce obdélníka obsahujícího všechna přípustná řešení, tj. podíl Y_1/Y_2 se bude rovnat podílu maximálních výnosů apod. Ukázalo se, že z hlediska společenského se jeví jako nejvýhodnější bod s největší efektivností.

13 Charakteristika dosavadní publikační činnosti na dané téma

První publikace na téma této monografie jsme publikovali již v roce 1979 [2], [3] a dále v roce 1983 [2] a 1985 [8] a [9]. Velká pozornost byla věnována produkčním funkcím a otázkám dynamických parametrů intenzity a extenzity též v disertační práci [6]. Celkem bylo od roku 1979 na téma této monografie publikováno 8 výzkumných prací či kapitol v monografii, 34 článků v odborném recenzovaném či impaktovaném časopise, 39 příspěvků na mezinárodních konferencích. Z toho 42 je evidováno v databázi RIV, SKOPUS a ve Web of Science. Pravidelně se této problematice věnují osvětové akce zejména na teoretických seminářích VŠFS. Jako školitelé jsme vedli na téma této monografie tři bakalářské (*Analýza vývoje podniku na základě dat z účetnictví*, Hanousek M.; *Měření kvality vývoje vybraných zemí pro potřeby orientace firem v mezinárodním obchodě*, Rautekranc, M. a *Indikátory vlivu inovací a dalších intenzivních faktorů na vývoj firmy*, Kvashuk, A.) a 6 diplomových prací (*Finanční stabilita a výkonnost podniku z pohledu moderních metod měření efektivity a vlivu intenzivnosti na činnost podniku*, Gaunulina, E.; *Finanční stabilita podniku z pohledu moderních metod měření efektivity*, Sinelnikova Y.; *Vztah mezi vývojem makroekonomických ukazatelů a vývojem retailových podniků v České republice*, Amiridis T.; *Vztah mezi efektivností vývoje firmy a rentabilitou tržeb*, Tarabrin, S.; *Význam merania efektívnosti v mikroekonomických systémech*, Hrabovská, M.; *Analýza vitality firmy*, Kníže, J.).

Mezi klíčové publikace na téma produkční funkce a odvození dynamických parametrů efektivity patří zejména publikace [6], [16], [22], [23], [28], [29], [72], [73], [75], [77], [81] a [86]. Národohospodářskými aplikacemi, které se věnují též otázce stanovení vah geometrické agregace výrobních faktorů práce a kapitálu α se zabývají zejména [27], [31], [33], [36], [37], [38], [39], [43], [49], [50], [59], [62], [69], [75], [76], [77], [81], [82], [83], [85] a [86]. Podnikovým aplikacím jsou věnovány práce [30], [32], [34], [35], [39], [40], [41], [42], [44], [45], [46], [47], [48], [52], [54], [55], [56], [57], [58], [70], [71], [72], [73], [75], [76], [80] a [84]. Novými aplikacemi v rámci odvození indikátorů udržitelného růstu, rozvoje teorie dynamické produkční funkce nebo nově koncipované nabídkové nebo cenové elasticity se zabýváme v publikacích [24], [25], [26], [54], [61], [63], [64], [66] a [67].

14 Závěry a další možnosti využití získaných výsledků

Vzhledem k tomu, že produkční funkce je standardní tradiční ekonomický nástroj, monografie přináší jejich souhrnný přehled obohacený o následující nové myšlenky, které vznikaly na základě dlouhodobé výpočetní a analytické činnosti v oblasti národohospodářské i podnikové. Ukázalo se, že produkční funkci lze zobecnit na jakýkoliv systém s proměnlivými vstupy a výstupy. Za produkční funkci lze v rámci tohoto zobecnění považovat i mnohé jednoduché identity jako je např. součin ceny a prodaného množství, který dává tržby. Původním záměrem výzkumu sice bylo zkoumat intenzitu a efektivnost ekonomického vývoje, avšak záhy se ukázalo, že je to velmi úzce spjata právě s produkčními funkcemi. Impulz k tomuto výzkumu pochází od prof. Ing. Františka Brabce, DrSc. geniálního matematika, konstruktéra, ekonoma a manažera, bývalého generálního ředitele Škodových závodů v Plzni a později rektora ČVUT.

Předložená typologie produkčních funkcí text neomezuje jen na jednu oblast ekonomie, nýbrž pokrývá co nejvíce ekonomických ale i dalších disciplín, ve kterých lze smysluplně vyjádřit vztah mezi vstupy produktivitou (efektivitou) vstupů a výstupem. Monografie v souladu s rešerší definuje statickou produkční funkci jako maximálním množstvím produkce, které může být vyrobeno s daným množstvím výrobních faktorů. Na této funkci, kterou lze zobrazit účelně pomocí polynomických funkcí různých řádů, lze systematicky vymezit význačné body, tj. inflexní bod, bod maximální efektivnosti, bod maximálního zisku a bod maximální produkce. Účelem statické produkční funkce je optimalizovat množství vložených výrobních faktorů. Text upřednostňuje bod s největší efektivností. Pokud toto množství neodpovídá např. poptávce je možno zvolit jinou technologii, což se projeví posunem statické produkční funkce. Přitom významné body těchto funkcí opisují trajektorii, která má povahu dynamické produkční funkce. U dynamické produkční funkce je podstatnou otázkou, jak se změna jednotlivých faktorů podílí na celkové změně výstupu. Pokud je produkční funkce vyjádřena prostřednictvím vstupů a jejich efektivnosti, lze definovat dynamické parametry extenzity a intenzity, které exaktně vyjádří vliv změny vstupů a vliv změny efektivnosti na změnu výstupů pro všechny možné situace (např. vstupy klesají, avšak efektivnost roste rychlejším tempem, takže ve výsledku výstup roste). Monografie věnuje speciální pozornost agregátní produkční funkci. Zdůvodňuje, proč by měla být vyjádřena jako součin souhrnného input faktoru (*TIF*) a souhrnné produktivity faktorů (*TFP*), respektive proč by výraz *TIF* měl být vyjádřen jako vážený součin práce a kapitálu, ve kterém by mohla být hodnota vah u práce a kapitálu i shodná. Text zde překonává tradiční aditivní pohled na více faktorovou produkční funkci jako multiplikativní vazbu, která umožňuje odvození růstového účetnictví s novou interpretací vah α a $(1-\alpha)$, které není nutno propočítávat za každý subjekt a každý rok.

Časová produkční funkce je využita pro prognózování vývoje HDP ekonomik USA, Číny a Indie do roku 2030 respektive 2050, kde vychází, že z hlediska absolutní výše HDP se před USA kromě Číny, která již nyní je na prvním místě, dostane i Indie. Prognóza obsahuje i vývoj ukazatelů intenzity a extenzity pro daná období, přičemž nejintenzivněji by se měla vyvíjet ekonomika Číny, potom Indie a nakonec USA.

V dalším kroku je do prognostické úlohy do roku 2030 zahrnuto 10 největších zemí světa podle *HDP* za rok 2020. Prolongování vývoje práce a produktivity práce v podobě *HDP* na obyvatele se započítáním covidových výpadků v roce 2020 predikuje ve vývoji absolutního *HDP* např. významný vývoj Indonésie, stabilní pozici Ruska, ztrátu elitního postavení Japonska a také Německa.

Monografie rovněž ukazuje, že v některých případech jako u kryptoměn, může být produkční funkce cílevědomě nastavena tak, aby bylo produkováno stejné množství výstupů při vzrůstajícím množství vstupů.

Monografie se věnuje také, dosud neřešené otázce, zda i v ekonomii je nutno za jistých okolností také počítat s jevem, kterému se ve fyzice říká *kvantování*. Odpověď je jednoznačná, ano. Pro vysvětlení byla použita opět produkční funkce, v podobě lomené funkce, přičemž v praxi se často používají spojité křivky. To je ale neúnosné, pokud musíme respektovat skutečnost, že uvažujeme s určitými kvanty, tj. jednotlivými rostlinami, kusy dobytka, firmami apod. Monografie přináší konkrétní tvary produkčních funkcí, respektujících kvantování v ekonomice.

Na problematice farmářské úlohy se ukazuje použití produkční funkce v teorii her. Tato dobře interpretovatelná, všeobecně známá úloha, která je dobře použitelná pro modelování vztahů mezi efektivností jedince danou využitím určitého bodu na konkrétní produkční funkci a efektivností společnou, tj. všech aktérů dohromady. V našem případě dvou nebo tří aktérů, potažmo jde o společenskou efektivitu. Příklady uvedené v kapitole 12 vždy předpokládají omezené zdroje. Součet výstupů všech aktérů je závislý na tom jak si aktéři tyto omezené zdroje rozdělí. Lze očekávat, že bude existovat alespoň jeden způsob rozdělení, který přinese nejvyšší součet výstupů (produktů, úrod) všech aktérů. Tento výsledek, ale závisí také na tvaru produkčních funkcí.

Na tuto problematiku se z relativně nového pohledu zaměřuje kapitola 12, která zkoumá přípustná řešení, která tvoří tzv. EDM elementární distribuční model, který je plně určen odpovídajícími produkčními funkcemi. Monografie přináší konkrétní tvary trojrozměrných EDM pro 3 farmáře (aktéry) a konkrétní lomenou produkční funkci. Za velmi zajímavé považujeme zjištění, že při optimálním celkovém množství vody je nejvyšší součet úrod jen pro jediný bod EDM, velmi citlivý na způsobu rozdělení vody. Optimální množství je takové, pro které je maximální celková efektivnost, tj. největší celková úroda z jednotky použité vody. Z teorie her pochází také v monografii odvozené EDM prostřednictvím tzv. metrik, tj. způsobů měření vzdáleností.

Doposud souhrnně nepublikované jsou EDM pro polynomické produkční funkce 2. až 5. řádu (subkapitola 12.3). Průběh funkcí je zde doplněn jejich derivacemi, průběhem zisku, efektivnosti a vždy jsou sledovány všechny významné body produkčních funkcí. To umožňuje systematicky sledovat jejich vzájemné souvislosti. Názornost zvyšuje též využití soustavy izokvant stálého zisku a stálé efektivnosti včetně společné izokvanty nulového zisku a současně jednotkové efektivnosti. To vše je promítnuto do odpovídajících tvarů hranice produkčních možností, tj. přípustných řešení v podobě EDM. Jejich zobrazení je doplněno izokvantami stálých součtů jako soustavy rovnoběžek, což usnadňuje snadné nalezení bodů s maximálním součtem výstupů obou aktérů. Z nových poznatků jsou nejzajímavější tyto dva:

- Při použití dvou polynomických produkčních funkcí se stává hranice EDM lineární pokud je u obou produkčních funkcí využit právě inflexní bod. Pokud jsme nad inflexním bodem je EDM náležitě konkávní (vypouklé).
- Ukázalo se, že „prohnutí“ produkční funkce v oblasti inflexního bodu, lze modelovat pomocí veličiny řádu příslušného polynomu. Čím vyšší řád polynomu, tím vyššího prohnutí lze dosáhnout. To se ukázalo jako velmi důležitý poznatek při modelování konkrétních produkčních funkcí. Kombinací jiných parametrů, tohoto efektu dosáhnout nelze.

V souhrnu monografie ukazuje, že problematika produkční funkce je rozsáhlá a i nadále vyžaduje další zkoumání a pozornost.

Publikace obsahující myšlenky publikované v této monografii

- [1] (Mihola, vedoucí řešitelského týmu), (1975). *Metodika hodnocení ekonomické efektivity průmyslu*, Výzkumná práce č. 35, VÚPŘ NH.
- [2] (Mihola, Pastrňák), (1979). *Matematický aparát konstrukce syntetických ukazatelů*, *Mathematic Apparatus of Synthetic Efficiency Indicators Construction*, Ekonomicko-matematický obzor 1, ISSN 0013-3027, s. 20-33.
- [3] (Mihola, Pastrňák), (1979). *Economic-efficiency Indicators and Management*, *Politická ekonomie*, volume: 27; Issue 1, ISSN 0032-3233, s. 81-85.
- [4] (Mihola a kolektiv), (1980), *Syntetické ukazatele efektivity*, Ekonomická studie č. 69, VÚPŘ NH, ABA001.
- [5] (Mihola, vedoucí řešitelského týmu), (1983). *Měření intenzity ekonomického vývoje*, Výzkumná práce č. 130, VÚPŘ NH, ABA001.
- [6] (Mihola), (1983). *Normativní přístup k tvorbě ukazatelů efektivity společenské výroby*, Disertační práce, ÚÚNV, EÚ ČSAV.
- [7] (Mihola, vedoucí řešitelského týmu), (1984). *Modelování hlavních charakteristik ekonomického vývoje jednotek výrobní sféry*, Výzkumná práce č. 1, ÚÚNV.
- [8] (Mihola), (1985). *Oceňování investičních aktivit v procesu intenzifikace*. Seminář Ekonomická komise pro Evropu, Kyjev, Ukrajina.
- [9] (Mihola), (1985). *Modelování hlavních charakteristik trajektorie výroby*, sborník Růst efektivity ekonomiky v 80. letech a jeho faktory, EÚ ČSAV, VP č. 221, MDT 330.131.5.
- [10] (Mihola, vedoucí řešitelského týmu), (1985). *Analýza funkcí parametru intenzity*, Ekonomická studie č. 52, ÚÚNV.
- [11] (Mihola, Kasalický), (1986). *Evaluation of the role of investment in stepping up economic activity*, B. set of summaries Economic, Bulletin for Europe č. 2, Oxford, New York (příspěvek do sborníku).
- [12] (Mihola, vedoucí řešitelského týmu), (1988). *Vybrané modelové prostředky národohospodářských, podnikových a demografických úloh*. Ekonomická studie č. 143, ÚÚNV.
- [13] (Mihola, vedoucí řešitelského týmu), (1989). *Prostředky modelování podnikové trajektorie vývoje*, Ekonomická studie č. 200, ÚÚNV.
- [14] (Mihola), (1991). *Lexikon tržních pojmů*, Mladá fronta, ISBN 80-204-0263-2, (monografie).
- [15] (Mihola, vedoucí řešitelského týmu), (1992). *Analýza ekonomiky ČSFR v roce 1992*, ÚÚNV, 1992 (monografie).
- [16] (Mihola), (1995). *Kvantitativní metody, distanční studium*. Návrh učebnice pro magisterské studium na VŠEM, 2005, 103 s. (skripta).
- [17] (Mihola, Hrach), (2005). *Souhrnné ukazatele*, Working Paper CES VŠEM, ISBN 1801-2728 (Výzkumná studie ev. RIV).
- [18] (Mihola, Hrach), (2005). *Souhrnné ukazatele – poznámky k jejich určování*, Bulletin CES Mihola, ISBN 1801-1578, (článek v odborném periodiku ev. RIV).

- [19] (Mihola), (2006). *Souhrnné ukazatele – poznámky k jejich určování*, Statistika č. 2, ISBN 0322-788X (recenzovaný článek).
- [20] (Mihola), (2006). *Kompozitní ukazatele udržitelného rozvoje*. (Východiska řízení k udržitelnému rozvoji. Výzkumná zpráva pro ČSÚ.)
- [21] (Mihola), (2006). *Metodické přístupy ke konstrukci souhrnných ukazatelů*, Statistika č. 5, ČSÚ (recenzovaný článek v odborném periodiku ev. RIV).
- [22] (Mihola), (2007). *Agregátní produkční funkce a podíl vlivu intenzivních faktorů*. Statistika č. 2, ČSÚ (recenzovaný článek).
- [23] (Mihola), (2007). *Souhrnná produktivita faktorů – přímý výpočet*, Statistika č. 6, ČSÚ (recenzovaný článek).
- [24] (Mihola), (2007). *Kompozitní ukazatele udržitelného růstu*, Mezinárodní konference Univerzita Karlova a STUŽ Udržitelný rozvoj – ideologie, nebo vize? Praha, 8. 12. (příspěvek na konferenci).
- [25] (Mihola, Hájek), (2008). *Udržitelný růst – matematický aparát*, Statistika č. 5, ČSÚ (recenzovaný článek).
- [26] (Mihola, Hájek), (2008). *Udržitelný růst – analýza České republiky*, Statistika č. 6, ČSÚ (recenzovaný článek).
- [27] (Mihola, Hájek), (2009). *Analýza vlivu souhrnné produktivity faktorů na ekonomický růst České republiky*. Politická ekonomie 6, Volume: 57; Issue: 6; (s. 740–753), ISSN 0032-3233 (impakt Web of Science).
- [28] (Mihola), (2012). *Vyjádření vlivu intenzivních faktorů a optimální struktura lidských zdrojů*, mezinárodní konference Riadenie ľudských zdrojov v kontexte globalnych zmien. Trenčianská univerzita A. Dubčeka v Trenčíně, 26. 4. 2012, ISBN 978-80-8075-530-0.
- [29] (Mihola, Vlach, Campbell), (2012). *Implications of the Quantisation of Production Factors*, Acta Oeconomica Universitatis Selye, 2012/1, ISSN 1338-6581 (článek v odborném periodiku ev. RIV).
- [30] (Mihola), (2012). *Měření intenzity výkonnosti podniku*, mezinárodní konference VŠB, Technická univerzita Ostrava, Ekonomická fakulta, 12. a 13. 9. 2012, sborník ISBN 978-80-248-2768-1 a Ekonomická Revue (Central Eurolien Review of Economic Issues), VŠB, Technická univerzita Ostrava (sborník konference a recenzovaný článek).
- [31] (Mihola, Cyhelský, Wawrosz), (2012). *Quality Indicators of Development Dynamics at All Levels of the Economy*, Statistics and Economy Journal, vol. 49, (2) 2012, ISSN0322-788X (článek v odborném periodiku ev. RIV).
- [32] (Mihola), (2012). (2. Kapitola, tj. 5 %, Šnapka, Petr a kol.) *Měření intenzity výkonnosti podniku*. Monografie Ekonomika a řízení podniku ve 21. století. VŠB, Technická univerzita Ostrava (monografie).
- [33] (Mihola, Bedretdinov), (2012). *Экономическое развитие Советского союза и Российской Федерации с точки зрения экономической теории*, АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГУМАНИТАРНЫХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК (recenzovaný časopis).
- [34] (Mihola), (2012). *Intenzita vývoje, teorie, příklady*. Mezinárodní konference Vysoké školy podnikání Ostrava, Katedra podnikání a managementu, 11. 10. 2012.

- [35] (Mihola, Kotěšovcová), (2013). *Konkurenční výhoda podniků s intenzivní trajektorií vývoje*, Mezinárodní konference Ekonomické univerzity v Bratislavě, Fakulta podnikového manažmentu, Katedra podnikání a managementu, 15. 4. 2013, sborník ISBN 978-80-225-3636-3 (příspěvek do sborníku).
- [36] (Mihola, Wawrosz), (2013). *Analyse des einflussanteiles der extensiven und intensiven faktoren der produktionsänderung*, Discussions on Estonian Economic Policy (Vol. 30, No. 1/2013), Berlín, Tallinn (příspěvek do sborníku).
- [37] (Mihola, Wawrosz), (2013). *Development Intensity of Four Prominent Economies*. Statistika č. 3, s. 26 až 40, ČSÚ, ISSN 1804-8765 (článek v odborném periodiku ev. RIV).
- [38] (Mihola, Wawrosz), (2013). *Analýza podílu vlivu extenzivních a intenzivních faktorů změny produkce*. Mezinárodní konference v Jänedě v Estonsku, 27. až 29. června 2013 (příspěvek na konferenci).
- [39] (Mihola, kolektiv autorů), (2013). *Rozhodování a rozhodovací procesy v organizace (vybrané problémy)*. Kapitola: *Měření intenzity vývoje podniku*. autoři: VŠB – TU Ostrava, VŠE Praha, Univerzita Komenského Bratislava, Ekonomická univerzita Bratislava, Slovenská akadémia vied Bratislava, VŠFS Praha, ISBN 978-80-248-3065-0 (kapitola v monografii).
- [40] (Mihola, Wawrosz), (2013). *The Share of Extensive and Intensive Factors on GDP Development of Selected EU Countries*. European Scientific Journal. ESJ December 2013, SPECIAL edition Vol. 1., ISSN 1857-7881 (článek v odborném periodiku ev. RIV).
- [41] (Mihola, Wawrosz), (2013). *Analysis of the share of the extensive and intensive factors on changes of the output on all level of the economy*. Discussion on Estonian Economic Policy. Vol. 21, No. 1, pp 85-102, ISSN 1736-5597 (článek v odborném periodiku ev. RIV).
- [42] (Mihola, Kotěšovcová), (2013). *Odpovídá vývoj ŠKODA AUTO znalostní společnosti?*, Příspěvky vybrané redakční radou k publikaci ve vědeckém časopise Fakulty ekonomické Trendy v podnikání, listopad 2013, ISSN 1805-0603, <http://tvp.zcu.cz/cd/2013/abstrakty.htm> (článek v odborném periodiku ev. RIV).
- [43] (Mihola, Wawrosz), (2013). *Kvalita trajektorie vývoje vybraných zemí EU, (Analýza dvacetiletých trajektorií vývoje deseti vybraných zemí EU)*. Conference Proceedings from 11th International Scientific Conference „Economic Policy in the European Union Member Countries”, September 18–20, 2013, Velké Karlovice, Czech Republic. Ostrava: Ekonomická fakulta, Technická univerzita Vysoká škola báňská. ISBN 978-80-248-3095-7 (článek v sborníku ev. RIV).
- [44] (Mihola, Kotěšovcová), (2013). *The Parameters of the Intensive Development of the Trajectories of the Knowledge Society. (Analysis of innovative companies in the USA using a dynamic parameter, intensity)*, Sborník ve Web of knowledge - Thompson Reuters, ISBN 978-80-245-1982-1 CONFERENCE SYSTEM APPROACH 2013 SYSTEM, SCIENTIFIC AND CRITICAL THINKING, October 10th – 11th, 2013, University of Economics, Prague (článek v sborníku ev. RIV).
- [45] (Mihola, Wawrosz), (2013). *Podnikové trajektorie vývoje znalostí společnosti. (Porovnání vývoje 7 významně inovativních firem USA)*, Sborník z mezinárodní vědecké konference znalosti pro tržní praxi 2013 (Veřejná ekonomika – současnost a perspektiva). Olomouc: Universita Palackého, ISBN 978-80-87533-05-5 (článek v sborníku ev. RIV).

- [46] (Mihola, Wawrosz), (2013). *Are US innovative companies really process innovative?* Proceedings of 8th Workshop on Knowledge Management. Bratislava: Vysoká škola manažmentu.
- [47] (Mihola, Kotěšovcová), (2013). *Kvalita trajektorie vývoje podniku ve znalostní ekonomice*, konference Hradecké ekonomické dny, Univerzita Hradec Králové, únor 2014, sborník ISBN 978-80-7435-367-3, http://fim.uhk.cz/hed/images/sbornik2014_2.pdf (článek do sborníku).
- [48] (Mihola, Kotěšovcová), (2013). *The competitive advantage of enterprizes with intensive trajectory*, konference Aktuální problémy podnikové sféry 2013, Ekonomická univerzita v Bratislavě, květen 2013, sborník ISBN 978-80-225-3636-3 (článek v sborníku ev. RIV a Web of Science).
- [49] (Mihola, Wawrosz), (2013). *Analysis of twenty years of development of the ten EU countries*. (Analyzá dvacetiletého vývoje 10 zemí EU.) Mezinárodní konference Tbilisi, Gruzie: EMF 2013, Eurasien Multidisciplinary Forum, 24-26. 10. 2013 (článek do sborníku).
- [50] (Mihola, Turková, Listopad), (2013). *Intenzita a extenzita vývoje vybraných zemí EU*, mezinárodní konference VŠFS Lidský kapitál a investice do vzdělání, 10. 10. 2013, ISBN 978-80-7408-084-5 (článek v sborníku ev. RIV).
- [51] (Mihola, Kotěšovcová), (2014). *Kvalita trajektorie vývoje podniků ve znalostní ekonomice*, Quality Enterprises Trajectory in the Knowledge Economy, Mezinárodní konference Hradecké ekonomické dny, Univerzity Hradec Králové, Fakulta Informatiky a Managementu, 4. a 5. 2. 2014, ISBN 978-80-7435-367-3 (článek do RIV).
- [52] (Mihola, Wawrosz), (2014). *Controlling tools for measurement of innovative company development enabling effective allocation of inputs*. Инструменты контроллинга для определения инновационного развития компании позволяют создавать условия для эффективной оптимизации входных величин, Mezinárodní konference „Controlling v MSP (malých a středních podnicích) - nejen o číslech“, VŠFS, Ekonomická fakulta, 25. 4. 2014, sborník ISBN 978-80-7408-086-9 (článek do sborníku ev. RIV).
- [53] (Mihola, Wawrosz), (2014). *Dynamická produkční funkce*, mezinárodní konference Aktuální problémy podnikové sféry 2014, Ekonomická univerzita v Bratislavě, 15. 5. 2014, ISBN 978-80-225-3867-1 (článek do sborníku ev. RIV).
- [54] (Mihola, Kotěšovcová), (2014). *Hodnocení vývoje extenzivních a intenzivních faktorů inovací ve společnosti Olma a.s.* mezinárodní konference Aktuální problémy podnikové sféry 2014, Ekonomická univerzita v Bratislavě, 15. 5. 2014, ISBN 978-80-225-3867-1 (článek do sborníku ev. RIV).
- [55] (Mihola), (2014). *The risk of unsatisfactory firm's development and ways how its profit is achieved*, Mezinárodní konference Řízení a modelování finančních rizik, VŠB Technická univerzita Ostrava, Ekonomická fakulta, Katedra financí, 8. - 9. 9. 2014 (článek do sborníku ev. RIV).
- [56] (Mihola, Wawrosz), (2014). *How to indicate firm's intensive and extensive development*. Mezinárodní konference, Ekonomika a řízení podniku ve 21. století, VŠB Technická univerzita Ostrava, Ekonomická fakulta, Katedra podnikohospodářská a Katedra managementu, 10. - 11. 9. 2014, ISBN 978-80-248-3520-4 (článek do sborníku ev. RIV).
- [57] (Mihola, Kotěšovcová, Wawrosz), (2014). *Is the most innovative firm of the world really innovative?*, časopis International Advance in Economic Research, indexován databází SCOPUS, prezentováno na 77th International Atlantic Economic Conference, kterou pořádala

International Atlantic Economic od 2. do 5. 4. 2014 v Madridu (článek do sborníku ev. SKOPUS).

[58] (Mihola, Wawrosz), (2014). *ИНСТРУМЕНТЫ КОНТРОЛЛИНГА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИННОВАЦИОННОГО РАЗВИТИЯ КОМПАНИИ ПОЗВОЛЯЮТ СОЗДАВАТЬ УСЛОВИЯ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ВХОДНЫХ ВЕЛИЧИН* (Controlling tools for measurement of innovative company development enabling effective allocation of inputs.) In: *Контроллинг на малых и средних предприятиях*, Прага, 25 апреля, 2014, Высшая школа финансов и управления. Сборник научных трудов (článek do sborníku ev. RIV).

[59] (Mihola, Wawrosz), (2014). *Alternativní metoda měření extenzivních a intenzivních faktorů změny HDP a její aplikace na vývoj HDP USA a Číny*. *Politická ekonomie* 5, ISSN 0032-3233 (recenzovaný článek v impaktovaném časopise ev. RIV).

[60] (Mihola, Wawrosz), (2014). *Analysis of long-run GDP development in the USA, the EU15, China and the USSR/Russia*. *Statistics and Economy Journal* 4/2014, ISSN 0322-788X (recenzovaný článek ev. RIV).

[61] (Mihola, Valenčík), (2014). *The Financing of the Productive Service Through HCC*, Mezinárodní konference *Economy and Business 2014*, Elenite, Bulharsko, září 2014, bulletin Science and Education Foundation.

[62] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2014). *How intensive was the growth of gross domestic product in the USA, EU15, China and Russia?*, 78th International Atlantic Economic Conference společnosti International Atlantic Economic Society 12. - 16. 10. v USA, Georgia, Savannah, účast umožňuje publikovat příspěvek v časopise *International Advances in Economic Research*, evidovaný SCOPUS.

[63] (Mihola, Wawrosz), (2014). *Controlling tools for measurement of innovative company development enabling effective allocation of inputs*. Mezinárodní konference „Controlling v MSP (malých a středních podnicích) - nejen o číslech“, VŠFS, Ekonomická fakulta, 25. 4. 2014, sborník ISBN 978-80-7408-086-9.

[64] (Mihola, Wawrosz), (2014). *Dynamická produkční funkce jako nástroj řízení firmy*. Konference *Nové trendy 2014 ve Znojmě* 13. a 14. 11. 2014 (přijatý recenzovaný příspěvek).

[65] (Mihola 70, Kotěšovcová), (2014). *Vliv změn cen na vývoj tržeb produkce*. Konference *Nové trendy 2014 ve Znojmě* 13. a 14. 11. 2014 (přijatý recenzovaný příspěvek).

[66] (Mihola), (2014). *Přehled českého školství*. Nakladatelství Melius, Praha, ISBN 978-80-87638-03-3 (monografie).

[67] (Mihola, Wawrosz), (2014). *Manažerská dynamická produkční funkce*. Mezinárodní konference *Hradecké ekonomické dny* 3. a 4. 2. 2015, [68] (Mihola 60 %, Kotěšovcová 40 %), (2014). *Metodika analýzy vývoje tržeb produkce*. Mezinárodní konference *Hradecké ekonomické dny* 3. a 4. 2. 2015.

[69] (Mihola, Valenčík, kolektiv), (2014). *Lidský kapitál a ekonomický růst*. Reprodukce lidského kapitálu – vzájemné vazby a souvislosti. 24. – 25. listopadu 2014. Slaný: Libuše Macáková, MELANDRIUM, s. 551-563. ISBN 978-80-87990-03-2.

[70] (Mihola, Kotěšovcová), (2015). *Metodika analýzy vývoje tržeb produkce*. In *Hradecké ekonomické dny 2015*, díl II. Hradec Králové: Gaudeamus, s. 258–266, 7 s. ISBN 978-80-7435-547-9.

- [71] (Mihola, Wawrosz), (2015). *Manažerská dynamická produkční funkce*. In: Hradecké ekonomické dny 2015, díl II. Hradec Králové: Gaudeamus, s. 267–273, 7 s. ISBN 978-80-7435-547-9.
- [72] (Mihola, Kotěšovcová, Wawrosz), (2015). *Is the most innovative firm of the world really innovative?* International Advances in Economic Research, 2015, roč. 21, č. 1, s. 41–54. ISSN 1083-0898.
- [73] (Mihola, Kotěšovcová), (2015). *Intenzita vývoje a dynamizace Du Pontova modelu*. In *Financial Management of Firms and Financial Institutions*, 10th International Scientific Conference. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, 2015. s. 799-806, 8 s. ISBN 978-80-248-3865-6.
- [74] (Mihola, Valenčík, Wawrosz a kolektiv), (2015). *Čtvrtá průmyslová revoluce, nebo ekonomika produktivních služeb?* Praha: VŠFS, z.ú. 100 s. ISBN 978-80-7408-126-2.
- [75] (Mihola, Wawrosz), (2015). *Analýza vývoje intenzity hrubého domácího produktu České republiky a Slovenské republiky*. Ekonomický časopis, Bratislava: Ústav ekonomickej teórie SAV, roč. 63, č. 8, s. 775–794. ISSN 0013-3035.
- [76] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2015). *A reflection of the business development intensity of companies in the Czech Republic and Slovakia*. In *Financial Management of Firms and Financial Institutions – Proceedings (Part II.)*, 10th International Scientific Conference. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, s. 574–581, 8 s. ISBN 978-80-248-3865-6.
- [77] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2016). *Úplná typologie vývoju HDP*. Scientia et Societas, Praha: NEWTON College, a. s., roč. 12, č. 3, s. 85–104. ISSN 1801-6057.
- [78] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2016). *Intensity and Extensity of Firm Development and Dynamic Dupont Analysis*. European Research Studies Journal, Piraeus: University of Piraeus, International Strategic Management Association, 2016, roč. 19, č. 4, s. 53–63. ISSN 1108-2976.
- [79] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2016). *How to Evaluate Intensity and Extensity of Company Development*. In *Ekonomická univerzita v Bratislavě. AKTUÁLNE PROBLÉMY PODNIKOVEJ SFÉRY 2016*. Bratislava: Vydavateľstvo EKONÓM, 2016, s. 501–516, 16 s. ISBN 978-80-225-4245-6.
- [80] (Mihola, Wawrosz), (2016). *LA. Dynamic parameters of intensity and extensity as alternative methods to growth accounting*. In *Double-blind peer reviewed proceedings of the international scientific conference Hradec Economic Days 2016*. Hradec Králové: University of Hradec Králové, 2016, s. 180–187. ISBN 978-80-7435-634-6.
- [81] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2017). *The Complex Typology of the Relationship between GDP and Its Sources*. Ekonomický časopis. Bratislava: Ekonomický ústav SAV a Prognostický ústav CSPV SAV, 2017, roč. 65, č. 10, s. 935–951. ISSN 0013-3035.
- [82] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2018). *The dependence of macroeconomic indicators on sovereign rating*. In Miroslav Čulík. *Managing and Modelling of Financial Risks*. 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2018. s. 235–243. ISBN 978-80-248-4225-7.
- [83] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2018). *GDP and Dynamic Intensity and Extensity Parameters - Calculation for the Czech Republic and Germany in the Period 1991–2017*. In Marešová Petra. *Hradec Economic Days*. Hradec Králové: University of Hradec Králové, 2018. s. 472–484. ISBN 978-80-7435-701-5.

[84] (Mihola, Wawrosz), (2018). Alternative measurement of elasticity. In Miroslav Čulík. *Managing and Modelling of Financial Risks*. 1. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2018, s. 329–336. ISBN 978-80-248-4225-7.

[85] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2018). How to Express and to Measure Whether an Economic System Develops Intensively. *Systems*. MDPI, St. Alban-Anlage 66, 4052 Basel, S: MDPI, 2018, roč. 6, č. 2, s. 1–18. ISSN 2079-8954.

[86] (Mihola, Wawrosz, Kotěšovcová), (2018). Comparison of the Development of GDP Quality in the Czech Republic and Germany. *International Advances in Economic Research*. Amsterdam: Springer, 2018, roč. 24, č. 1, s. 97–98. ISSN 1083-0898.

[87] (Mihola, Budínský, Kotěšovcová), (2019). The relationship between sovereign credit rating and trends of macroeconomic indicators. *Investment Management and Financial Innovations*. Sumy (Ukraine): LLC Consulting Publishing Company „Business Perspectives”, 2019, roč. 16, č. 3, s. 292–306. ISSN 1810-4967.

Literatura

- ADAMOV, A. (1973). O ukazatelích efektivity průmyslové výroby. Věstník statistiky, č. 4/1973.
- BARONE, E. (1896). Sopra un recente libro del Wicksteed. [Francouzský překlad WALRAS, L. (1964): Sur un livre récent de Wicksteed. Cahiers Vilfredo Pareto, č. 3, s. 68–73.]
- BAIS, S. (2009). *ROVNICE-Symboly poznání*. Překlad Jan Obdržálek. Dokořán, Praha, 2009, 95 s., ISBN 978-80-7363-228-1.
- BEZDĚK, V., DYBCZAK, A., KREJDL, A. (2003). Czech Fiskal Policy: Introductory Analysis. Czech National Bank, Working Paper. 2003, no. 7.
- BINMORE, K. G. (2014). *Teorie her: ...a jak může změnit náš život*, nakladatelství Dokořán, 230 s., ISBN 978-80-7363-549-7.
- BLANCHARD, O. (2010). *Macroeconomics*. New York: Pearson.
- BÖHM-BAWERK, E. von (1959). The Positive Theory of Capital. South Holland, IL: Libertarian Press, s. 257–289.
- BOONE, L. (2000). Comparing Semi-Structural Methods to Estimate Unobserved Variables. The HPMV and Kalman filters Approaches OECD. Economics Department Working Papers No. 240.
- BARTSCH, H. (1987). *Matematické vzorce*. Nakladatelství SNTL, Praha, 832 s.
- BRABEC, F. J. (1978). Vliv rozvoje vědy a techniky na růst efektivity společenské výroby. Finance a úvěr, č. 1/1978.
- BRABEC, F., PASTRŇÁK, I., MIHOLA, J. (1978). Uplatnění kritérií efektivity společenské výroby. Souhrnný materiál REV, výzkumná zpráva II/53, 1978.
- BUCHTA, M. (2006). *Mikroekonomie II*. 2. vyd. Pardubice: Univerzita Pardubice.
- COMIN, D. (2010). *Economic growth*. Steven N. Durlauf, Lawrence E. Blume. Pp. 260–263, ISBN 978-0-230-23883-1.
- CYHELSKÝ, L., MIHOLA, J., WAWROSZ, P. (2012). *Quality Indicators of Developments Dynamics at All levels of the Economy*. Statistika (Statistic and Economy Journal). Vol. 49, No. 2, pp. 29–43.
- ČEČELEVA, T. (1975). Národohospodářská efektivity, metody jejího oceňování a analýzy. Otázky ekonomiky, č. 5/1975.
- ČERMÁKOVÁ, E., MIHOLA, J. (1989). Měření multikolinearity respektující závislost všech proměnných., Ekonomicko-matematický obzor, ČAV č. 2/1989, ISSN 0013-3027.
- ČERNÝ, J. (2011). Comparison of Cobb-Douglas Production Functions of the Chosen Countries by Using Econometric Model. Comparison of Cobb-Douglas Production Functions of the Chosen Countries by Using Econometric Model. 2011.
- ČSÚ (2020). Hrubý domácí produkt – Časové řady ukazatelů čtvrtletních účtů [online]. [cit. 7.2.2020]. Dostupné na: https://www.czso.cz/csu/czso/hdp_cr
- ČSÚ (2020). Nejnovější ekonomické údaje [online]. [cit. 7.2.2020]. Dostupné na: <https://www.czso.cz/csu/czso/aktualniinformace>
- ČSÚ (2018). Podíl nezaměstnaných osob [online]. [cit. 7.12.2019]. Dostupné na: <https://www.czso.cz/csu/xc/podil-nezamestnanych-osob-v-kraji-v-prosinci-2018-lehce-vzrostl>

ČSÚ (2019). Základní charakteristiky ekonomického postavení obyvatelstva ve věku 15 a více let [online]. [cit. 7. 12. 2019]. Dostupné na:
<https://vdb.czso.cz/vdbvo2/faces/cs/index.jsf?page=vystup-objekt&pvo=ZAM01-D>

ČNB (2020). Hlavní ukazatele [online]. [cit. 7. 2. 2020]. Dostupné na:
https://www.cnb.cz/cnb/STAT.ARADY_PKG.hlavni_ukazatele?p_iframe=0&p_lang=CS

DENISON, E. F. (1962). *The Source of Economic Growth in the United States and the Alternatives before Us*. Washington DC: Committee for Economic Development.

DURICA, M., KRAMAROVA, K. (2020). Financial Distress Prediction in the Czech Republic: a CART approach. 10th International Scientific Conference on Managing and Modelling of Financial Risks, VŠBT-TU Faculty of Economics, Department of Finance, Ostrava 8. 9. 2020.

DYBCZAK, K., FLEK, V., HÁJKOVÁ, D., HURNÍK, J. (2006). *Supply-Side Performance and Structure in the Czech Republic (1995–2005)*. Working Paper No. 4. Praha: Česká národní banka.

ESTRADA, A., HERNANDO, I., LÓPEZ-SALIDO, J. D. (2000). Measuring the NAIRU in the Spanish Economy. Documento de Trabajo n° 00009.

FABIANI, S., MESTRE, R. (2000). Alternative measures of the NAIRU in the euro area: estimates and assessment. ECB WP.

FEYMAN, R. (1970). *The Feynman Lectures on Physics Vol I*. Addison Wesley. ISBN 978-0-201-02115-8.

FILEPLANET. GRETL. Dostupné na: <https://gretl.fileplanet.com/>

FLUX, A. W. (1894): Review of Philip H. Wicksteed's Essay on the Co-ordination of the Laws of Distribution. *Economic Journal*, 4, June, s. 308–313.

GIORNO, C., et al. (1995). Potential Output, Output Gaps and Structural Budget Balances, OECD Economic Studies, No. 24, 1995/I, OECD, Paris.

GORDON, R. J. (1997). The Time-Varying NAIRU and its Implications for Economic Policy. *Journal of Economic Perspectives*.

GORDON, R. J. (2014). *Macroeconomics*. New York: Pearson.

HÁJEK, M. (2006). Zdroje růstu, souhrnná produktivita faktorů a struktura v České republice. *Politická ekonomie* č. 2. Vol. 54, No. 2, pp. 170–189.

HÁJEK, M. (1973). Vývoj národohospodářské efektivnosti československého hospodářství v letech 1971–1971. *Politická ekonomie* 21, č. 8/1973.

HÁJEK, M., BEZDĚK, V. (2000). Odhad potenciálního produktu a produkční mezery v ČR. WP Česká národní banka.

HÁJEK, M., MIHOLA, J. (2009). *Analýza vlivu souhrnné produktivity faktorů na ekonomický růst České republiky*. *Politická ekonomie* č. 6., Vol. 57, No. 6, pp. 740–753. ISSN 0032-32, s. 740-753.

HARTL, P., HARTLOVÁ, H. (2000). *Psychologický slovník*, nakladatelství portál, 774 s., ISBN 80-7178-303-x.

HÁJEK, M., TOMS, M. (1972). Vědecko technický pokrok, extenzivní a intenzivní hospodářský růst a metody jeho měření. *Politická ekonomie* 20, č. 12/1972.

HÁJEK, M., TOMS, M. (1982). Proces intenzifikace a prognózování růstu souhrnné hospodárnosti československé ekonomiky. *Politická ekonomie*, č. 9, ISSN 0032-32.

- HEISLER, H., VALENČÍK, R., WAWROSZ, P. (2010). *Mikroekonomie – základní kurz*, EUPRESS, VŠFS, ISBN 978-80-7408-039-5.
- HLOUŠEK, M., POLANSKÝ, J. (2007). Produkční přístup k odhadu potenciálního produktu – aplikace pro ČR. *Národohospodářský obzor*. Brno: Ekonomicko-správní fakulta MU, 2007, č. 4.
- HODRICK, R., PRESCOTT, E. (1980). *Post-war Business Cycles: An Empirical Investigation*. Working Paper, Carnegie-Mellon University.
- HOLMAN, R. (2002). *Mikroekonomie: středně pokročilý kurz*. Vyd. 1. Praha: C.H. Beck.
- HOŘEJŠÍ, B. (2006). *Mikroekonomie*. 4. rozš. vyd. Praha: Management Press.
- HRÁČKOVÁ, J. (2015). Mezera výstupu a historie jejího užití. S. 29–30 [online]. Masarykova univerzita. [cit. 7. 12. 2019]. Dostupné na: https://is.muni.cz/th/r1se3/Diplomova_prace.pdf
- HURNÍK, J., NAVRÁTIL, D. (2005). *Potential Output in the Czech Republic: A Production Function Approach*. *Prague Economic Papers*. Vol. 14, No. 3, pp. 253–266.
- HUSAIN, S., ISLAM, S. (2016). *A Test for the Cobb Douglas Production Function in Manufacturing Sector: The Case of Bangladesh*. *International Journal of Business and Economics Research*, sv. 5, č. 5, s. 149–154.
- HUŠEK, R. (2007). *Ekonometrická analýza*. Praha: Oeconomica. ISBN 978-80-245-1300-3.
- INTERNATIONAL MONETARY FUND (2020). *World Economic Outlook Database*, October 2020. Dostupné na: <https://www.imf.org/en/Publications/SPROLLS/world-economic-outlook-databases#sort=%40imfdate%20descending>.
- INVESTIČNÍ WEB (2015). *Obecná míra nezaměstnanosti v Česku* [online]. [cit. 7.12.2019]. Dostupné na: <https://www.investicniweb.cz/news-2015-1-30-obecna-mira-nezamestnanosti-v-cesku-v-prosinci-klesla-na-59/>
- JAŠOVÁ, E. (2016). Koncept a metody odhadu NAIRU a hospodářského cyklu na trhu práce v zemích Visegrádské skupiny. S. 106. *Národohospodářská fakulta VŠE v Praze*.
- JAŠOVÁ, E. (2010). Podobnosti a rozdíly ve vývoji míry nezaměstnanosti neakcelerující inflaci a hospodářského cyklu ve vybraných střeoevropských zemích do roku 2008. *Současná Evropa a Česká republika*. Centrum evropských studií VŠE Praha, Praha.
- JAŠOVÁ, E. (2011). Vybrané otázky z oblasti NAIRU, potenciálního produktu a produkční mezery na publikovaných datech a predikci vývoje v České republice do konce roku 2010 [online]. *Business & IT* [cit. 7. 2. 2020]. Dostupné na: http://bit.fsv.cvut.cz/issues/01-11/full_01-11_02.pdf
- JÍLEK, J., MRÁZ, J., DUBSKÝ, S. (1976). *Příručka statistiky pro hospodářské pracovníky*, SNTL/ALFA, Praha 1976.
- KLACEK, J. (2006). *Souhrnná produktivita faktorů – otázky měření*. *Statistika*. Vol. 43, No. 2, pp. 285–305.
- KAKU, M. *Hyperprostor*. Argo/Dokořán, (2008), ISBN 978-80-7363-193-2.
- KLACEK, J. (2006). *Souhrnná produktivita faktorů – otázky měření*. *Statistika*. Vol. 43, No. 2, pp. 285–305.
- KLACEK, J., VOPRAVIL, J. (2008). *Multifaktorová souhrnná produktivita faktorů: Empirická aplikace produkční funkce KLEM* [výzkumná studie ČSÚ]. Praha: ČSÚ.
- KOLÁČKOVÁ, A. (2013). *Produkční funkce a odhad jejich parametrů*. Brno: Mendelova Univerzita. Dostupné na:

https://is.mendelu.cz/auth/zp/portal_zp.pl?prehled=pracoviste;podrobnosti_zp=38576;zp=38576;download_prace=1;lang=cz.

KOLÁČKOVÁ, A. (2015). *Produkční funkce v makroekonomii*. Brno: Mendelova Univerzita.

Dostupné na:

https://is.mendelu.cz/auth/zp/portal_zp.pl?prehled=pracoviste;podrobnosti_zp=48264;zp=48264;download_prace=1.

KOLMAN, V. (1999). *Filozofie čísla*. AV ČR, FILOSOFIA, Praha 2008, 670 s., ISBN 978-80-7007-279-0.

KOŠŤÁKOVÁ, T. (2015). Meziroční a meziměsíční srovnání [online]. Měsíčník českého statistického úřadu [cit. 7. 2. 2020]. Dostupné na:

<https://www.statistikaamy.cz/2015/06/mezirocní-a-mezimesicni-srovnani/>

KŘIVÝ, I. (2012). Analýza časových řad [online]. [cit. 7. 12. 2019]. Dostupné na: <http://www1.osu.cz/~bujok/files/ancas.pdf>

KUTTA, F., TOMS, M., HÁJEK, M. (1975). Efektivní a intenzivní růst ekonomiky a metody jeho měření. In: *Ekonomické problémy vědeckotechnického rozvoje*, Praha, Academia, 1975.

KVAŠA, J. (1974). Měření efektivity společenské výroby. *Otázky ekonomiky*, č. 5/1974.

LÁNSKÝ, J. (2018). *Possible State Approaches to Cryptocurrencies*. In: *Journal of Systems Integration*, Vol. 9, No. 1, 2018, pp. 19–31. ISSN 1804-2724. DOI: 10.20470/jsi.v9i1.335.

LIVIO, M. (2006). *Zlatý řez*, nakladatelství Argo/Dokořán, Praha 2006, ISBN 80-7363-064-8.

LIVIO, M. (2009). *Je bůh matematik?* Argo/Dokořán, 2009, ISBN 978-80-7363-282-3.

MACÁKOVÁ, L. (2010). *Mikroekonomie: základní kurs*. 11. vyd. Slaný: Melandrium.

MAKIN, A. J., STRONG, S. (2013). *New Measures of Factor Productivity in Australia. A Sato Approach*. *Applied Economics*, sv. 45, č. 16–18, s. 2413–2422.

MALTHUS, T. R. (1798). *An Essay on the Principle of Population*. 1st ed. London: J. Johnson.

MASLOVA, H. O ukazateli ekonomických výsledků. *Otázky ekonomiky*, č. 7/1967.

MCADAM, P., MCMORROW, K. (1999) The NAIRU Concept – Measurement uncertainties, hysteresis and economic policy role.

MIHOLA, J. (2007a). *Aggregate Production Function and the Share of the Influence of Intensive Factors*. *Statistic and Economy Journal* 44(2):108–132.

MIHOLA, J. a kol. (2017). Analýza vlivu intenzivních faktorů vývoje ekonomiky. VŠFS, edice SCIENCEpress, 103 s., ISBN 978-80-7408-147-7.

MIHOLA, J. (2007b). *Souhrnná produktivita faktorů – přímý výpočet*. *Statistika*, Vol. 44, No. 6, pp. 446–463.

MIHOLA, J., BÍLKOVÁ, D. (2014). Measurement of Multicollinearity Using Determinants of Correlation Matrix. *International Journal of Mathematical Sciences*, London: Recent Science Publications, 2014, Vol. 34, No. 2, s. 1543–1549. ISSN 2051-5995.

MIHOLA, J., PASTRŇÁK, I. (1979). Matematický aparát konstrukce syntetických ukazatelů. *Ekonomicko-matematický obzor*. Praha: Československá akademie věd, 1979, 1/1979, s. 20–32. ISSN 0013-3027.

MIHOLA, J., WAWROSZ, P. (2014). *Alternativní metoda měření extenzivních a intenzivních faktorů změny HDP a její aplikace na vývoj HDP USA a Číny*. *Politická ekonomie* 5, ISSN 0032-3233.

- MIHOLA, J., WAWROSZ, P. (2014). *Controlling tools for measurement of innovative company development enabling effective allocation of inputs*. Mezinárodní konference „Controlling v MSP (malých a středních podnicích) - nejen o číslech“, VŠFS, Ekonomická fakulta, 25. 4. 2014, ISBN 978-80-7408-086-9.
- MIHOLA, J., WAWROSZ, P. (2013). *Development Intensity of four Prominent Economies*. Statistika (Statistic and Economy Journal). Vol. 93, No. 3, pp. 26–40.
- MIHOLA, J., WAWROSZ, P., KOTĚŠOVCOVÁ, J. (2014). *Is the most innovative firm of the world really innovative?* International Advance in Economic Research, indexován SCOPUS, prezentováno na 77th International Atlantic Economic Conference společnosti, International Atlantic Economic od 2. do 5. 4. 2014 v Madridu.
- MIHOLA, J., WAWROSZ, P., KOTĚŠOVCOVÁ, J. (2016). Úplná typologie vývojů HDP. Scientia et Societas, Praha: NEWTON College, a. s., roč. 12, č. 3, s. 85–104. ISSN 1801-6057.
- MINISTERSTVO FINANCÍ ČR. (2009). *Makroekonomická predikce ČR*. Praha: MF ČR.
- MISHRA, S. K. (2010). *A Brief History of Production Functions*. The IUP Journal of Managerial Economics, sv. 8, č. 4, s. 6–34.
- MPSV (2019). Nezaměstnanost – měsíční [online]. [cit. 7. 12. 2019]. Dostupné na: <https://www.mpsv.cz/web/cz/mesicni>
- MORROW MC, K., ROEGER, W. (2001). Potential Output: Measurement Methods, "New" Economy Influences and Scenarios for 2001–2010 - A Comparison of the EU15 and the US. Economic and Financial Affairs (ECFIN) of the European Commission, No. 150, 4–21.
- NAKAMOTO, S. (2008). Bitcoin P2P e-cash paper. Dostupné na: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>
- OECD (2003). *The Sources of Economic Growth in OECD Countries*. Paris: OECD.
- OECD (2004). *Understanding Economic Growth*. Paris: OECD.
- OECD (2010). *Ministerial report on the OECD Innovation Strategy*. Paris: OECD.
- OECD (2005). *The Oslo Manual for measuring innovation*. Paris: OECD.
- PASTRŇÁK, I., MIHOLA, J. (1978). Význam syntetických ukazatelů v plánování efektivnosti a problémy jejich konstrukce. Plánované hospodářství, č. 12, 1978.
- PAVLÍK, J. (2001). *Adam Smith a teorie spontánního řádu*, in: *Adam Smith, Pojednání o podstatě a původu bohatství národů*, Liberální institut, Praha 2001, 986 s., ISBN 80-86389-15-4.
- POCK, M. (2010). *Gasoline demand in Europe: New insights*. *Energy Economics* 32: 54–62. <http://ideas.repec.org/a/eee/eneeco/v32y2010i1p54-62.html>
- POŠTA, V. (2008). Odhad NAIRU pro českou ekonomiku [online]. Ministerstvo financí České republiky [cit. 7. 12. 2019]. Dostupné na: https://www.mfcr.cz/assets/cs/media/Odborne-vyzkumy_2008_Odhad-NAIRU-pro-ceskou-ekonomiku.pdf
- RICARDO, D. (1817). *On the Principles of Political Economy and Taxation*. London: Murray.
- RICHARDSON, P., BOONE, L., GIORNO, C., MEACCI, M., RAE, D., TURNER, D. (2000). The concept, policy use and measurement of structural unemployment: estimating a time varying NAIRU across 21 OECD countries. OECD WP, 2000.
- ROMER, P. M. (1983). *Dynamická konkurenční rovnováha s externalitami, zvyšující se výnosy a neomezený růst*. University of Chicago. OCL 28795806, proQuest 303206758
- SAMUELSON, P. A., NORDHAUS, D. (2000). *Ekonomía*. 16. vyd. Překlad Ivan Figura. Bratislava: Elita, 820 s. ISBN 80-804-4059-X.

- SATO, R. (1964). *Diminishing Returns and Linear Homogeneity: Comment*. American Economic Review, sv. 54, č. 5, s. 744–745.
- SEIFE, C. (2005) *Nula. Životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Dokořán a Argo, Praha 2005, 263 s., ISBN 80-7363-048-6.
- SICKLES, R. C., ZELENYUK, V. (2019). *Measurement of Productivity and Efficiency: Theory and Practice*. Cambridge (UK): Cambridge University Press.
- SOLOW, R. M. (1956). *Contribution to the Theory of Economic Growth*. The Quarterly Journal of Economics. Vol. 70, No. 1, pp. 65–94.
- SOLOW, R. M. (1957). *Technical Change and the Aggregate Production Function*. Review of Economics and Statistics. Vol. 39, No. 3, pp. 312–320. JSTOR 1926047.
- SOTO, H. de (2007). *Mystérium kapitálu: proč kapitalismus triumfuje na západě a selhává všude jinde na světě*. Praha: Rybka Publishers.
- SOUKUP, J. (2012). *Mikroekonomická analýza*. Praha: E-knihy.
- STEHR, N. (1994). *Knowledge society*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- STEHR, N., BÖHME, G. (1998). *The Knowledge Society. The Growing Impact of Scientific Knowledge on Social Relations*. Heidelberg: Springer.
- SYNEK, M., KISLINGEROVÁ, E. (2011). *Podniková ekonomika*. 5. vydání. Praha: C. H. Beck.
- ŠEVELA, M. (2012). *Microeconomics I: introductory course*. Druhý dotisk. Brno: Mendelova univerzita v Brně.
- SWAN, T. W. (1956). *Economic Growth and Capital Accumulation*. Economic Record. Vol. 32, No. 2, pp. 334–361.
- TALEB, N. N. (2011). *Černá labuť*. Paseka, Praha, 469 s., ISBN 978-80-7432-128-3.
- THÜNEN, J. H. von (1930). *Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie*. Jena, Germany: Fischer.
- TOMS, M. (1973). K problematice národohospodářské efektivity. Politická ekonomie 21, č. 8/1973.
- TOMS, M. (1977). Lokální kritéria a národohospodářská efektivity. Finance a úvěr 27, č. 3/1977.
- TRÁGE, D. (2011). Časově-frekvenční analýza hrubého domácího produktu ČR. S. 6 [online]. Vysoké učení technické v Brně [cit. 7. 12. 2019]. Dostupné na: https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=36049
- TURGOT, A. R. J. (1767). *Observations sur le Mémoire de M. de Saint-Péray*. Limoges. In: DAIRE, E. (ed.): (1844). *Euvres de Turgot*. Paris, s. 414–433. [Překlad: Observations on a Paper by Saint-Péray on the Subject of Indirect Taxation. In: GROENEWEGEN, P. D. (1977): *The Economics of A. R. J. Turgot*. The Hague: Kluwer Academic Publisher, s. 43–95.
- VARADZIN, F. a kol. (2004). *Ekonomický růst*. Praha: Professional Publishing.
- VEJMOLA, S. Měření rentability. Hospodářské noviny, č. 29/1972.
- WAWROSZ, P., HEISLER, H., HELÍSEK, M., MACH, P. (2012). *Makroekonomie základní kurz*. Praha: VŠFS.
- WICKSELL, K. (1900). *Marginal Productivity as the Basis for Distribution in Economics*. Ekonomisk Tidskrift. In: LINDAHL, E. (ed.) (1958): *Selected Papers on Economic Theory by Knut Wicksell*. London: Allen & Unwin, s. 93–121.

- WICKSELL, K. (1901). *Föreläsningar i nationalekonomi*. Vol. I, Lund. [Překlad: WICKSELL, K. (1967): Lectures on Political Economy. London: Augustus M. Kelley Pubs.
- WICKSELL, K. (1923). Note on Dr. Åkerman. *Ekonomisk Tidskrift*, č. 5–6.
- WICKSTEED, P. H. (1894): An Essay on the Co-ordination of the Laws of Distribution. London: Macmillan & Co. Revidované vydání (1999) s předmluvou Iana Steedmana. Aldershot, England: Edward Elgar.
- WÖHE, G., KISLINGEROVÁ, E. (2007). *Úvod do podnikového hospodářství*. Praha: C. H. Beck.
- YGLESIAS, M. (2014). The NAIRU, explained: why economists don't want unemployment to drop too low. Vox [online]. [cit. 7. 12. 2019]. Dostupné na: <https://www.vox.com/2014/11/14/7027823/nairu-natural-rate-unemployment>
- ZIMKOVÁ, E., BAROCHOVSKÝ, J. (2007). *Odhad potenciálního produktu a produkční mezery v slovenských podmínkách*. Politická ekonomie 4. Vol. 55, No. 4, pp. 473–489.
- ŽÁK, M. a kol. (2002). Velká ekonomická encyklopedie. 2. rozšířené vydání, Linde Praha 2002, 887 s., ISBN 80-7201-381-5.

Resumé

The monograph develops the theory of production functions and their systematic typology. It looks at the relationship between inputs and outputs as a universal relationship that is used not only in economics but also in other disciplines. In addition to the static production function, special attention is paid to the dynamization of individual quantities and the issue of expressing the effect of changes in these quantities on the change in production. It is explained why in the aggregate production function expressed through aggregate factor input and aggregate factor productivity it is necessary to use a multiplicative relationship, why the multiplicative link is also suitable in terms of total input factor and why the share of weights in labor and capital should be the same. The use of the production function is demonstrated on the development of the economies of the USA, China and India and on the ten largest economies of the world in terms of absolute GDP, on cryptocurrencies and on the so-called farming role.

In addition to a comprehensive overview of production functions, the monograph also enriches new ideas that arose during long-term computational and analytical activities of economic and business. Particularly innovative is the generalization of the production function to any system with variable inputs and outputs. The production function can thus be recognized in many identities. The original intention of the research was to examine the intensity of economic development, but it turned out that it is closely related to production functions. The impetus for this research comes from Prof. Ing. František Brabec, DrSc. a genius mathematician, designer, economist and manager, former general director of Škoda in Pilsen and later rector of ČVÚT.

The presented typology of production functions is not limited to one area of economics, but goes beyond it. The monograph respects the definition of the static production function as the maximum amount of production that can be produced with a given number of production factors. On this function, which can be effectively displayed using polynomial functions of different orders, significant points can be systematically defined, ie the inflection point, the point of maximum efficiency, the point of maximum profit and the point of maximum production. The purpose is to optimize the number of inserted production factors. The text is preferred the point with the greatest effectiveness. If this quantity does not correspond, for example, to demand, it is possible to choose another technology, which will be reflected in a shift in the static production function. At the same time, the important points of these functions describe the trajectory, which has the nature of a dynamic production function. For a dynamic production function, the crucial question is how the change in individual factors contributes to the overall change in output. If the production function is expressed through inputs and their efficiency, dynamic parameters of extensibility and intensity can be defined, which exactly express the effect of changes in inputs and the effect of changes in efficiency on changes in outputs for all possible situations. Special attention is paid to the aggregate production function. It explains why it should be expressed as the product of the aggregate input factor (TIF) and aggregate factor productivity (TFP), or why the term TIF should be expressed as a weighted product of labor and capital, in which the value of labor and capital weights could be and identical. The monograph

here surpasses the traditional additive view of the multi-factor production function by proposing a multiplicative link, which also allows the derivation of growth accounting, but with a new interpretation of weights α and $(1-\alpha)$, which do not need to be calculated for each subject and each year.

The time production function is used to forecast the GDP development of the US, China and India economies until 2030 and 2050, respectively. It is also predicted an increase in the absolute GDP of Indonesia, a stable position of Russia and the loss of the elite position of Japan and Germany.

The monograph also deals with the hitherto unresolved question of whether, even in economics, it is also necessary in certain circumstances to take into account a phenomenon called quantization in physics. It turns out that quantization is a common thing in economics, which is documented on specific forms of production functions that respect quantization in economics.

The monograph also deals with the relationship between the efficiency of an individual given the use of a certain point on a specific static production function and common efficiency, ie all actors together. These examples assume limited resources. The sum of the outputs of all actors depends on how the actors share these limited resources. It can be expected that there will be at least one method of distribution that will bring the highest sum of outputs (products, crops) of all actors. This result, however, also depends on the shape of the production functions. This is investigated using EDM, i.e. elementary distribution models. EDM for polynomial production functions of the 2nd to 5th order are not yet published in summary. Of the new findings, they are the most interesting. When using two polynomial production functions, the EDM boundary becomes linear if the inflection point is used for both production functions. If we are above the inflection point, the EDM is properly concave. It turned out that the "bending" of the production function in the region of the inflection point can be modeled using a quantity of the order of the respective polynomial. The higher the order of the polynomial, the higher the deflection can be achieved. This proved to be a very important finding in modeling specific production functions. This effect cannot be achieved by combining other parameters.

O vedoucím autorského kolektivu



Ing. Bc. Jiří Mihola, CSc., se specializuje na obecnou ekonomii, mikroekonomii, makroekonomii, hospodářskou teorii a politiku, statistiku, diagnostiku a pedagogiku. Využívá při tom kombinaci technického, ekonomického a pedagogického vzdělání. V letech 1974 až 1991 se věnoval výzkumu ve vazbě na výzkumná pracoviště CERGE UK a Pittsburské univerzity. V letech 1991 až 1993 byl pověřen vedením Ústředního ústavu národohospodářského. V období 1992 až 2005 podnikal jako ředitel investiční společnosti Investice Portfolio & Partner a majitel nestátního zdravotního zařízení celostní medicíny. Všechny tyto činnosti propojuje diagnostika. Učil na vysokých školách, pracoval na ČSÚ, v občanském sdružení Melius a vedl četné výzkumné projekty hrazené MŠMT nebo Evropským sociálním fondem ČR. Hojně publikuje v domácích a zahraničních odborných časopisech i tiscích pro širší veřejnost. Vypracoval vlastní metodiku pro analýzy intenzity rozvoje zemí i firem, navrhl originální metodu měření multikolinearity. Je autorem knižních publikací Lexikon tržních pojmů, Přehled českého školství a dalších. Působí jako lektor na VŠFS, v Ústavu práva a právní vědy, na European Business School SE apod.